

Entwurf strukturvariabler Regelungen mittels linearer Matrixungleichungen

Vom Fachbereich 18
Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Darmstadt
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Dilyana Domont-Yankulova

geboren am 02. Juni 1979 in Sofia, Bulgarien

Referent: Prof. Dr.-Ing. J. Adamy
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. B. Lohmann
Tag der Einreichung: 21. Januar 2010
Tag der mündlichen Prüfung: 10. Mai 2010

D17
Darmstädter Dissertationen

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Fachgebiet Regelungstheorie und Robotik des Instituts für Automatisierungstechnik an der Technischen Universität Darmstadt.

Mein besonderer Dank geht an Herrn Professor Adamy, der durch seine Unterstützung, positive Einstellung und Fähigkeit, Leute zu motivieren, sehr viel zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Bei der Bearbeitung des Themas haben mir außerdem die Hinweise von Herrn Boris Jasiewicz und Herrn Hendrik Lens sehr geholfen.

Danke auch an Herrn Prof. Lohmann für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Des Weiteren möchte ich mich bei allen Kollegen für die angenehme, freundschaftliche Atmosphäre am Fachgebiet und für die spannenden Diskussionen in den Mittagspausen bedanken.

Ferner sind die Freunde zu erwähnen, die mich bei der Durchsicht der Arbeit unterstützt haben. Ihre Vorschläge haben viel für die bessere Verständlichkeit der Arbeit beigetragen. Mein Dank dafür gilt Hendrik Lens, Stephan Kirstein, Thomas Gußner, Klaus Kefferpütz und Hanno Sättler.

Darmstadt, im Januar 2010

Dilyana Domont-Yankulova

Kurzfassung

Viele regelungstechnische Entwurfsverfahren vernachlässigen die Stellgrößenbeschränkungen, was die Regelgüte und Stabilität des Systems stark beeinflussen kann. Deswegen ist es sinnvoll, die Stellgrößenbeschränkungen beim Entwurf zu berücksichtigen.

Die Arbeit beginnt mit einem Überblick der verschiedenen Methoden zum Umgang mit Stellgrößenbeschränkungen. Danach liegt der Fokus auf den strukturvariablen Regelungen. Das sind nichtlineare Zustandsrückführungen, deren Koeffizienten in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand so variieren, dass die zur Verfügung stehende Stellgröße möglichst gut ausgenutzt wird. Des Weiteren zeichnen sie sich durch hohe Regelgüte und verhältnismässig geringen Entwurfsaufwand aus.

In dieser Arbeit wird näher auf zwei spezielle strukturvariable Regelungen eingegangen. Zuerst werden die weichen strukturvariablen Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen betrachtet, deren Koeffizienten sich kontinuierlich in Abhängigkeit von einem implizit definierten, zustandsabhängigen Parameter ändern. Bei der zweiten Variante handelt es sich um Regelungen mit stückweise linearer Struktur. Hierbei wird der Zustandsraum in Gebiete aufgeteilt, an deren Grenze zwischen zwei linearen Teilreglern umgeschaltet wird. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt auf der Darstellung der vorhandenen Entwurfsbedingungen als lineare Matrixungleichungen (LMIs). Die LMI-Darstellung in Kombination mit einer konvexen Gütefunktion reduziert den Entwurf auf ein semidefinites Optimierungsproblem, das sich schnell und zuverlässig mittels Innere-Punkte-Verfahren lösen lässt. Dadurch wird der Entwurf deutlich vereinfacht und beschleunigt.

Einige Anwendungsbeispiele demonstrieren die Vorteile der mittels der neuen LMI-Verfahren entworfenen Regelungen. Die strukturvariablen Zustandsrückführungen sind bei vergleichbarem Entwurfsaufwand deutlich schneller als die linearen. Bei einigen Systemen kann ein fast zeitoptimales Verhalten beobachtet werden.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	v
Wichtige Formelzeichen und Abkürzungen	ix
1 Einleitung	1
2 Problemstellung und Zielsetzung	5
2.1 Problemstellung	5
2.2 Methoden zum Umgang mit Stellgrößenbeschränkungen	6
2.3 Strukturvariable Regelungen	10
2.3.1 Geschichtliche Entwicklung	11
2.3.2 Regelungen mit abschnittsweise linearer Struktur	14
2.3.3 Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen	16
2.3.4 Regelung mit mehrdeutigen Ljapunov-Funktionen	17
2.4 Ziele dieser Arbeit	20
3 Lineare Matrixungleichung: Einführung	21
3.1 Definition	22
3.2 Eigenschaften und Lemmata	23
3.3 Lösungsverfahren	26
4 LMI-Entwurf weicher strukturvariabler Regelungen	33
4.1 Bisheriges Entwurfsverfahren	33
4.2 Problemstellung	38
4.3 Vereinfachung der Monotoniebedingung	39
4.3.1 Anwendung der Regel von Newton	40
4.3.2 Darstellung als parameterabhängige Matrix	47
4.4 Einschließen aller Anfangsauslenkungen	52
4.5 Wahl einer Gütefunktion	56
4.5.1 Volumen-Maximierung des Anfangsgebiets	56
4.5.2 Maximieren der Abklingrate des Anfangssystems	58
4.5.3 Minimieren eines quadratischen Gütemaßes	60
4.6 Untersuchung der Menge zulässiger Parameter	61

5	LMI-Entwurf von abschnittsweise linearen Reglern	67
5.1	Bisherige Entwurfsverfahren	67
5.2	Problemstellung	68
5.3	Vereinfachung des Entwurfs	69
5.4	Verteilung der Eigenwerte	72
5.5	Glättung des Stellgrößenverlaufs mittels Interpolation . .	80
6	Anwendungsbeispiele	84
6.1	Hydraulischer Aktor	84
6.2	Verladebrücke	89
6.3	Flugzeug	94
6.4	Vergleich und Bewertung der Regelungen	97
7	Zusammenfassung und Ausblick	98
A	Anhang	101
A.1	Stabilitätssatz von Ljapunov	101
A.2	Nebenbedingungen in LMI-Form	101
A.3	Matrizen: verwendete Definitionen, Lemmata, Sätze . . .	103
A.4	Duales Problem	103
A.5	Entwurfsergebnisse	106
A.5.1	Hydraulischer Aktor	106
A.5.2	Verladebrücke	107
A.5.3	Flugzeug	108
	Literaturverzeichnis	110

Wichtige Formelzeichen und Abkürzungen

Lateinische Buchstaben

a_i	Koeffizienten der normierten charakteristischen Gleichung des unregulierten Systems oder eines beliebigen reellen Polynoms
\mathbf{a}	Vektor, der die Koeffizienten der normierten charakteristischen Gleichung des unregulierten Systems zusammenfasst, $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]^T$
\hat{a}_i	Koeffizienten der normierten charakteristischen Gleichung des mittels \mathbf{k}_1 geregelten Systems
$\hat{\mathbf{a}}$	Vektor, der die Koeffizienten der normierten charakteristischen Gleichung des mittels \mathbf{k}_1 geregelten Systems zusammenfasst, $\hat{\mathbf{a}} = [\hat{a}_0, \hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{n-1}]^T$
\mathbf{A}	Systemmatrix des unregulierten Systems
$\hat{\mathbf{A}}_1$	Systemmatrix des mittels \mathbf{k}_1 geregelten Systems
$\hat{\mathbf{A}}_p$	Systemmatrix des mittels \mathbf{k}_p geregelten Systems
$\hat{\mathbf{A}}(v)$	Systemmatrix des mittels $\mathbf{k}(v)$ geregelten Systems
\mathbf{b}	Eingangsvektor
\mathbf{c}	Ausgangsvektor
$\mathbf{D}(v)$	Diagonalmatrix $\mathbf{D} = \text{diag}(v^n, v^{n-1}, \dots, v)$
\mathcal{D}	Definitionsbereich
c_p	Skalierungsfaktor
e_1, e_2	Elemente einer Menge
$e(v)$	Kontinuierliche Funktion, die die Ljapunov-Gebiete $\mathcal{G}(v)$ skaliert
\mathcal{E}_i	Ellipsen bzw. Ellipsoide
f	Kontinuierliche Funktion mit skalaren Koeffizienten
$f_{\Im}(p)$	Funktion zur Modifikation des Imaginärteils
$f_{\Re}(p)$	Funktion zur Modifikation des Realteils
$\mathbf{F}(\mathbf{x})$	Affine Funktion mit symmetrischen Matrizen als Koeffizienten, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$

\mathbf{F}_i	Symmetrische Matrizen, Koeffizienten von $\mathbf{F}(\mathbf{x})$
$\mathcal{F}(\mathbf{x}, p)$	Allgemeiner von dem Systemzustand \mathbf{x} und dem Selektionsparameter p abhängiger Operator
$g(v, \mathbf{x})$	Kontinuierliche Funktion mit Parametern v, \mathbf{x} . Die Gleichung $g(v, \mathbf{x}) = 0$ definiert implizit die Ljapunov-Funktion v
\mathbf{G}	Schiefsymmetrische Matrix
$\hat{\mathbf{G}}$	Positiv semidefinite Gewichtungsmatrix
$\mathcal{G}_p, \mathcal{G}(v)$	Ljapunov-Gebiet des mittels \mathbf{k}_p bzw. $\mathbf{k}(v)$ geregelten Systems
\mathbf{H}_i	Stabile Matrizen
$\mathbf{H}(k)$	Hilfsmatrix, deren Elemente an der Stelle $i = j = k$ den Wert 1 haben und an den restlichen Stellen den Wert 0
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
\mathbf{k}_1	Anfangsregler, entspricht bei einer stückweise linearen Regelung dem \mathbf{k}_p für $p = 1$ und bei einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung dem $\mathbf{k}(v)$ für $v = 1$
\mathbf{k}_{lin}	Lineare Zustandsrückführung
$\mathbf{k}_{\text{lin}}^{\text{SNF}}$	Lineare Zustandsrückführung in Steuerungsnormalform
$\mathbf{k}_p, \mathbf{k}(v)$	Parameterabhängige lineare Zustandsrückführungen
$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$	Lagrange-Funktion
m	Ordnung eines beliebigen reellen Polynoms
\mathbf{M}	Diagonalmatrix $\mathbf{M} = \text{diag}(0, 1, \dots, n - 1)$
$\tilde{\mathbf{M}}$	Reguläre Matrix
n	Systemordnung
\mathbf{N}	Diagonalmatrix $\mathbf{N} = \text{diag}(-n, -(n + 1), \dots, -1)$
p	Bezeichnung für den Selektionsparameter bei einer abschnittsweise linearen Regelung oder für ein reelles Polynom
$\mathbf{P}(l, k)$	Abkürzung für $\begin{cases} \prod_{q=0}^{k-1} [(l - q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] & \text{für } k \neq 0 \\ \mathbf{I} & \text{für } k = 0 \end{cases}$
\mathbf{Q}	\mathbf{R}_1^{-1}
\mathbf{R}	Positiv definite Matrix
\mathbf{R}_1	Positiv definite Matrix, bestimmt die Form des Ljapunov-Gebiets für $p = 1$ bei einer stückweise linearen Regelung bzw. für $v = 1$ bei einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung

$\mathbf{R}_p, \mathbf{R}(v)$	Parameterabhängige positiv definite Matrizen
s	Skalierungsfaktor
$S(\dots)$	Selektionsstrategie
\mathbf{S}	Reelle symmetrische Matrix
t	Zeit
t_{opt}	Umschaltpunkte der zeitoptimalen Steuerung
T	Simulationszeit
$T_{5\%}$	Zeit, die nach einer Anfangsauslenkung zum Erreichen des 5%-Toleranzband benötigt wird
u, u_p	Eingänge
u_{\min}, u_{\max}	Untere bzw. obere Grenze für die Stellgröße
$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1$	Umgebungen des Ursprungs
v	Implizite Ljapunov-Funktion
v_{\min}	Untere Grenze des Intervalls, in dem die implizite Ljapunov-Funktion v monoton abnimmt
$v_p(\mathbf{x})$	Ljapunov-Funktion des mittels des Reglers \mathbf{k}_p geregelten Systems
x	Unbekannte Variable
x_i	Reelle und komplexe Wurzeln eines Polynoms oder Elemente des Zustandsvektors
\mathbf{x}	Zustandsvektor des Systems oder in der Optimierung Parameter des primalen Problems
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor des Systems
\mathcal{X}_0	Gebiet möglicher Anfangsauslenkungen
y	Ausgang
\mathbf{y}	Ausgangsvektor
\mathbf{z}	Entspricht $\mathbf{R}_1^{-1}\hat{\mathbf{a}}$ bei einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung und $\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{k}_1$ bei einer stückweise linearen Regelung
\mathbf{Z}	Parameter des dualen Problems

Griechische Buchstaben

α	Abklingrate
α_i	Reelle Nullstellen eines Polynoms
α_{opt}	Vorzeichen der Stellgröße einer zeitoptimalen Steuerung in dem ersten Schaltintervall
β	Skalierungsfaktor
γ	Obere Grenze der Ausgangsenergie des Systems
ϵ	Reelle Zahl

η	Dualitätslücke
Θ_i	Symmetrische Matrizen, Koeffizienten der parameterabhängigen Matrix $\Theta(\rho)$
Θ_Σ	Parameterunabhängige Matrix, deren Elementen Koeffizienten der parameterabhängigen Matrix $\Theta(\rho)$ sind
$\Theta(\rho)$	Parameterabhängige Matrix
λ	Eigenwerte eines Systems bzw. einer Matrix
λ	Lagrange-Multiplikator
ν	Lagrange-Multiplikator

Abkürzungen

ES	Evolutionsstrategie
GS	Gleichungssystem
iWSVR	implizite weiche strukturvariable Regelung
interp.	interpoliert
LMI	lineare Mäatrixungleichung (engl. linear matrix inequality)
LTi	linear und zeitinvariant (engl. linear time invariant)
PLC	Regler mit abschnittsweise linearer Struktur (engl. piecewise-linear control)
u. d. N.	unter den Nebenbedingungen
WSVR	weiche strukturvariable Regelung
zeitopt.	zeitoptimal

1 Einleitung

In vielen regelungstechnischen Entwurfsverfahren werden die Stellgrößenbeschränkungen vernachlässigt. In der Realität ist es jedoch so, dass die Aktoren aufgrund von physikalischen oder wirtschaftlichen Gründen nur in einem bestimmten Bereich arbeiten können - ein Motor hat typischerweise nur ein begrenztes Drehmoment oder ein hydraulischer Aktor hat einen maximal möglichen Durchfluss. Das Erreichen von diesen Begrenzungen kann bekanntlich zur Verschlechterung der Regelgüte (großes Überschwingen, lange Ausregelzeiten) und in einigen Fällen zu Instabilität führen. Es stellt sich die Frage: Wie lässt sich dieses Problem umgehen?

Der nächstliegende Gedanke ist, die Regelung so zu entwerfen, dass die Stellgrößenbeschränkungen nie verletzt werden. Für einen linearen Regler führt dies dazu, dass die zur Verfügung stehende Stellgröße für kleine Auslenkungen nicht vollständig ausgenutzt wird. Die Konsequenz ist eine lange Ausregelzeit, so dass dieser Ansatz nur bedingt für Probleme geeignet ist, wo eine möglichst schnelle Ausregelung erwünscht ist.

Eine Möglichkeit, lineare Entwurfsverfahren zu verwenden und trotzdem die Ausregelzeiten gering zu halten, bieten die sogenannten Anti-Windup-Verfahren [40, 54]. Die Grundidee besteht darin, zuerst eine lineare Regelung mit den gewünschten Eigenschaften zu entwerfen, als ob es keine Beschränkungen gäbe, und im Nachhinein durch geeignete Rückführungen die negativen Effekte der Sättigung des Aktors zu vermeiden. Dadurch wird die Regelgüte verbessert, oft fehlt allerdings ein strenger Beweis der Stabilitätseigenschaften [42].

Eine weitere Idee ist es, die Sättigung des linearen Reglers zu erlauben, gleichzeitig aber sicherzustellen, dass das System im gesättigten Bereich stabil bleibt. Die Stellgrößenbeschränkungen lassen sich in diesem Fall im Entwurf einbeziehen, und der Regler wird so entworfen, dass eine bestimmte Regelgüte bei sichergestellter Stabilität erreicht wird [42].

Bei allen bis jetzt beschriebenen Ansätzen bleibt der Regler im ungesättigten Bereich linear. Das Problem, dass die Stellgröße für kleine Auslenkungen nicht vollständig genutzt wird, wird dadurch also nur gemildert. Theoretisch sind jedoch bessere Ausregelzeiten möglich. Um diese

zu erreichen, kommen verschiedene nichtlineare Verfahren in Frage. Eine klassische Lösung bietet die zeitoptimale Regelungstheorie [24]. Der Entwurfsaufwand für solche mittels des Maximumprinzips von Pontrjagin oder der dynamischen Programmierung bestimmbare Regelungen ist jedoch meistens sehr hoch. Außerdem sind sie wegen der Sprünge im Stellgrößenverlauf schwer zu realisieren [24].

Eine andere ursprünglich in der Prozessindustrie verbreitete Lösung bieten die modellprädiktiven Regelungen. Unter der expliziten Berücksichtigung der Beschränkungen wird der Stellgrößenverlauf in jedem Schritt anhand eines vorhandenen Prozessmodells gemäß eines Gütekriteriums optimiert. Wegen der Performance-Steigerung gegenüber dem ursprünglichen Istzustands niedriger Kapitalinvestitionen und der erreichbaren hohen Zuverlässigkeit finden diese Regelungen hohe Akzeptanz in der Industrie [55, 71]. Hauptnachteil ist allerdings der hohe Rechenaufwand bei der Lösung eines Optimierungsproblems in jedem Abtastschritt und die damit verbundenen Restriktionen auf die Geschwindigkeit der Zustandsänderungen.

Deutlich weniger aufwendig sind die Online-Berechnungen bei den in dieser Arbeit behandelten strukturvariablen Regelungen. Bei einem im Vergleich zu den zeitoptimalen Regelungen verringerten Entwurfs- und Realisierungsaufwand wird eine hohe Regelgüte erreicht. Prinzipiell werden sie in zwei Klassen eingeteilt: parameter- und strukturumschaltende Regelungen, bei denen in Abhängigkeit vom Systemzustand zwischen verschiedenen Regelungen umgeschaltet wird, sowie weiche strukturvariable Regelungen, bei denen die Parameteränderungen kontinuierlich erfolgen.

Die erste Klasse lässt sich ferner in umschaltende Regelungen mit und ohne Gleitzustand unterteilen. Der Gleitzustand ist durch höherfrequentes Umschalten zwischen den einzelnen Reglern charakterisiert und stellt eine hohe Belastung für die Stellglieder dar. Daher ist er in den meisten Fällen unerwünscht. Für bestimmte Anwendungen kann er allerdings aufgrund seiner Robustheit gegen Störungen und Parameterschwankungen des Systems von Vorteil sein.

Die Verfahren, bei denen ein Gleitzustand angestrebt wird, sind prinzipiell von den Verfahren ohne Gleitzustände, bei denen die Robustheit zunächst im Hintergrund steht, zu unterscheiden. Das Ziel der Regelungen ohne Gleitzustände ist meistens, eine hohe, suboptimale Regelgüte unter Berücksichtigung von bestimmten Beschränkungen zu erreichen. Dies ist auch das Ziel der in dieser Arbeit unter anderem betrachteten stückweise linearen Regelung von Kiendl und Schneider [50, 52]. Neben niedrigen

Ausregelzeiten können aber im Prinzip auch andere Gesichtspunkte wie z. B. Rechenzeiteinsparung und Realisierungsaufwand betrachtet werden [4].

Obwohl die schaltenden Regelungen ohne Gleitzustand meistens eine zufriedenstellende Regelgüte aufweisen, ist das Auftreten von Sprüngen im Stellgrößenverlauf beim Umschalten zwischen den Teilreglern ein prinzipieller Nachteil dieser Methode. Er lässt sich jedoch durch eine kontinuierliche Änderung der Reglerparameter einfach vermeiden. Die strukturvariablen Regelungen mit kontinuierlicher Parameteränderung können daher als eine Weiterentwicklung der umschaltenden Regelungen betrachtet werden. Da sie aber eine nicht mehr abschnittsweise lineare Systemstruktur aufweisen, wird der Stabilitätsbeweis anders gestaltet. Wie die kontinuierliche Änderung der Parameter erfolgt, ist von Verfahren zu Verfahren unterschiedlich. Dadurch sind verschiedene Typen von weichen strukturvariablen Regelungen entstanden:

- weiche strukturvariable Regelungen mit variabler Sättigung [6]
- dynamische weiche strukturvariable Regelungen [26, 27]
- weiche strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen [3, 4] und
- sättigende weiche strukturvariable Regelungen [15]

Die weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen lässt sich weiterhin erweitern, indem mehrdeutige Ljapunov-Funktionen zugelassen werden [68].

In dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt auf der weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen. Obwohl der Entwurf dieser Regelung deutlich einfacher als der einer zeitoptimalen Regelung ist, basiert er bislang auf einem Optimierungsproblem, das nur mittels eines Suchverfahrens, z. B. einer Evolutionsstrategie, gelöst werden kann. Daher ist das Endergebnis stark von der Wahl geeigneter Initialwerte abhängig und erfordert unter Umständen lange Rechenzeiten. Das Hauptziel dieser Arbeit besteht darin, den Entwurf zu beschleunigen und seine mathematische Handhabbarkeit zu verbessern. Im Weiteren wird die Möglichkeit zur Übertragung des Konzepts auf die stückweise lineare Regelung von Kiendl und Schneider [50, 52] untersucht.

Nach Formulierung des betrachteten Problems und der Einordnung bekannter Lösungsmöglichkeiten wird in dem nächsten Kap. 2 näher auf die strukturvariablen Regelungen eingegangen. Bestimmte Typen erweisen

sich als sehr geeignet zur Lösung des gestellten Problems. Wünschenswert ist allerdings ein noch einfacherer Entwurf. Die dafür notwendigen Schritte werden am Ende von Kap. 2 festgelegt. In dieser Arbeit werden Lösungsverfahren entwickelt, die auf linearen Matrixungleichungen (engl. Linear Matrix Inequalities (LMIs)) basieren, daher wird in Kap. 3 näher auf die Definition und Eigenschaften von LMIs eingegangen. Dies soll das Verständnis der nachfolgenden Kapitel auch für Leser ohne Vorkenntnisse in diesem Gebiet erleichtern, wohingegen mit der Materie vertraute Leser dieses Kapitel überspringen können. Das Kapitel beginnt mit einer Definition des Begriffs “*lineare Matrixungleichung*”, gefolgt von einigen wichtigen Eigenschaften und Sätzen, die in der Arbeit Verwendung finden. Eine Vorstellung der numerischen Lösungsverfahren, die bei der Lösung von LMI-Problemen angewendet werden, und der in dieser Arbeit verwendeten Software schließt das Kapitel ab. Um den Entwurf einer weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen geht es in Kap. 4. Die Entwurfsbedingungen werden in Form von linearen Matrixungleichungen dargestellt und eine geeignete Gütefunktion so gewählt, dass sich Standardverfahren zur Lösung von LMI-Problemen wie das Innere-Punkte-Verfahren anwenden lassen. Im Weiteren wird untersucht, inwieweit das neue Entwurfsverfahren die Menge der zulässigen Parameter begrenzt. In Kap. 5 wird der Entwurf einer Regelung mit abschnittsweise linearer Struktur nach Kiendl und Schneider [50, 52] erläutert. Außerdem wird gezeigt, dass sich auch diese Regelung mittels LMIs entwerfen lässt. Die auftretenden Sprünge im Stellgrößenverlauf können durch eine Interpolation zwischen den Teilreglern vermieden werden. Die Effizienz der neuen Entwurfsverfahren und die erzielbare Regelgüte werden in Kap. 6 anhand einiger Beispiele demonstriert. Mit sehr geringem Entwurfsaufwand wird annähernd zeitoptimales Verhalten erreicht. Die Arbeit wird in Kap. 7 mit einer Zusammenfassung der erreichten Ergebnisse und einem Ausblick abgeschlossen.

2 Problemstellung und Zielsetzung

2.1 Problemstellung

Es werden zeitinvariante, kontinuierliche lineare Systeme betrachtet, die durch das Zustandsmodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (2.1)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (2.2)$$

n -ter Ordnung beschrieben werden. Das System sei vollständig steuerbar und beobachtbar. Die Zustände \mathbf{x} werden gemessen oder durch einen Beobachter geschätzt. Die Stellgröße ist begrenzt und die Stellgrößenbeschränkung

$$|u| \leq u_{\max} \quad (2.3)$$

ist symmetrisch um den Nullpunkt¹. Die möglichen Anfangszustände $\mathbf{x}(0)$ liegen in dem konvexen Gebiet

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x}(0) \mid x_{iu} \leq x_i(0) \leq x_{io}, \ i = 1, \dots, n\}. \quad (2.4)$$

Das Hauptziel ist es, dass der Zustandsvektor \mathbf{x} und dadurch auch die Ausgangsgröße y für alle möglichen Auslenkungen $\mathbf{x}(0)$ innerhalb des Gebiets \mathcal{X}_0 so schnell wie möglich und ohne großes Überschwingen die Ruhelage erreichen. Dabei soll die Stellgrößenbeschränkung eingehalten und in den Entwurf einbezogen werden. Eine weitere Zielstellung ist, dass der Entwurfsaufwand möglichst gering bleibt. Der Aufwand für die Online-Berechnungen ist nach Möglichkeit ebenfalls niedrig zu halten.

¹Unsymmetrische Beschränkungen der Art $-u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ mit $u_{\min}, u_{\max} > 0$ lassen sich in konservativere symmetrische Beschränkungen umformen. Die Bedingung $|u| \leq \min(u_{\min}, u_{\max})$ ist hinreichend für das Einhalten der unsymmetrischen Beschränkung. Bei stark unsymmetrischen Beschränkungen kann diese Abschätzung allerdings sehr konservativ sein.

2.2 Methoden zum Umgang mit Stellgrößenbeschränkungen

Die Hauptschwierigkeit bei dem gestellten Problem liegt darin, dass eine möglichst schnelle Ausregelung erwünscht ist, was eine optimale Ausnutzung der Stellgröße erfordert. Der lineare Bereich wird also verlassen und die Grenzen des Aktors erreicht. Dies wird auch als Sättigung des Aktors bezeichnet. Es gibt, wie in der Einführung skizziert, eine Vielzahl von Methoden, die Beschränkungen des Aktors zu berücksichtigen. Sie alle haben ihre Vor- und Nachteile und unterscheiden sich in ihrer Entwicklungsgeschichte, ihrem Funktionsprinzip, ihrem Entwurfs- und Realisierungsaufwand. Eine chronologische Bibliographie der bis 1995 zum Thema erschienen Publikationen findet sich in [10]. Die Bandbreite der Veröffentlichungen ist groß. Der Einfluss der Sättigung wird unter anderem in Zusammenhang mit Robustheit, mit adaptiven und optimalen Regelungen, mit diskreten und hybriden Systeme betrachtet. Der Schwerpunkt der Übersicht in diesem Abschnitt liegt beim Reglerentwurf für lineare kontinuierliche Systeme mit Stellgrößenbeschränkung, bei der Entwicklungsgeschichte und -richtungen der in der Einführung angesprochenen Methoden.

Grundsätzlich kann man die Verfahren grob in zwei Gruppen unterteilen. Zu der ersten Gruppe gehören Verfahren, die hauptsächlich aus dem akademischen Umfeld stammen. Eine besondere Rolle spielt dabei die Sicherstellung der lokalen bzw. globalen Stabilität. Die Feststellung, dass bei Beschränkung der Stellgröße globale asymptotische Stabilität² für einen n -fachen Integrierer mit $n \geq 3$ nicht mittels eines linearen Reglers erreicht werden kann [31, 80], führt zu einer weiteren Unterteilung. Einige Forscher versuchen, globale Stabilität durch nichtlineare Regler zu erreichen. Für asymptotisch null-steuerbare Systeme³ ist dies immer möglich [76]. Die konkrete Konstruktion einer Zustandsrückführung für eine Integrierer-Kette n -ter Ordnung ($n \geq 3$) mit einem Stelleingang wird in [81] beschrieben. Die globale Stabilität wird dort durch eine nichtlineare Kombination von Sättigungsfunktionen erreicht. Dieses Ergebnis wird in [79] für alle asymptotisch null-steuerbaren Systeme verallgemeinert. Es werden zwei nichtlineare Regler präsentiert. Der erste basiert

²Notwendige Voraussetzung für globale asymptotische Stabilität eines linearen Systems mit Stellgrößenbeschränkung ist, dass das System asymptotisch null-steuerbar ist, d. h. es ist stabilisierbar, und die Realteile der Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A} sind kleiner bzw. gleich null [79].

³Siehe vorige Fußnote

auf einer linearen Kombination und der andere auf einer Verkettung von gesättigten linearen Zustandsrückführungen. Der Fall, in dem nicht alle Zustände messbar sind, wird ebenfalls betrachtet.

Da allerdings bei den meisten praktischen Applikationen das Systemmodell nur in einem bestimmten Bereich des Zustandsraums gültig ist, verzichten andere Forscher auf eine globale Stabilität. In diesem Fall spricht man von einer lokalen Stabilisierung. Hierbei wird sichergestellt, dass der praxisrelevante Bereich des Zustandsraums innerhalb des Einzugsgebiets des Systems liegt. Für asymptotisch null-steuerbare Systeme mit Stellgrößenbeschränkung kann dieses Einzugsgebiet durch Wahl eines geeigneten linearen Reglers sogar beliebig groß gewählt werden, was auch als semi-globale Stabilisierung bezeichnet wird [59].

Ein weiterer Vorteil der lokalen Methoden ist, dass sie auch für lineare Systeme mit Stellgrößenbeschränkung, dessen Pole in der offenen rechten Halbebene liegen, anwendbar sind [42, 43]. Da bei solchen Systemen das größte Einzugsgebiet⁴ endlich ist, ist dessen Kenntnis besonders wichtig. Die genaue Bestimmung ist für Systeme höherer Ordnung leider nicht möglich, so dass dieses Gebiet nur abgeschätzt werden kann. Die Referenzen in [42, Kapitel 7] bieten einen Überblick der gängigen Verfahren. Gute Abschätzungen liefern die kürzlich entwickelten LMI-basierten Methoden (z. B. [5, 44]). Durch diese Verfahren lässt sich schnell auch das größte Einzugsgebiet finden, in dem eine vorgegebene Stellgröße ungesättigt bleibt (siehe z. B. [41]). Es ist also möglich, unabhängig von den Stabilitätseigenschaften des unregulierten Systems eine lineare Regelung zu entwerfen, die die Beschränkungen a priori im Entwurf mitberücksichtigt. Durch Definition von zusätzlichen Beschränkungen und Änderung des Gütekriteriums lassen sich die Reglereigenschaften einfach modifizieren. Da die Stellgrößenbeschränkung nie verletzt wird, werden solche Methoden in der englischsprachigen Literatur als Low-Gain-Methoden bezeichnet (siehe z. B. [59, 82]). Sie haben das bekannte Problem, dass die Kapazität des Aktors für kleine Auslenkungen nicht völlig ausgeschöpft wird. Dies lässt sich mittels sogenannter Low-High-Gain-Methoden umgehen. Es handelt sich dabei um eine zusammengesetzte Regelung, bestehend aus einem Regler mit niedriger und einem mit hoher Verstärkung [33, 73]. Zuerst wird der Regler mit niedriger Verstärkung entworfen. Dies kann z. B. mittels der in [59, 61, 82] beschriebenen Low-Gain-Verfahren erfolgen. Die Aufgabe von diesem Regler ist es, die Stabilität der Ru-

⁴Häufig wird auch der Begriff kontraktiv invariantes Gebiet (engl: contractive invariant set) verwendet.

helage zu garantieren und sicherzustellen, dass die a priori vorgegebene Menge möglicher Anfangszustände innerhalb des Einzugsgebiets des geregelten Systems liegt. Die entsprechende Ljapunov-Funktion wird im nächsten Schritt benutzt, um einen Regler mit höherer Verstärkung zu entwerfen. Er dient zur Verbesserung bestimmter Eigenschaften der Regelung, wie z. B. der Ausnutzung der Stellgröße, der Robustheit und der Störgrößenunterdrückung.

Die Möglichkeit zur Berücksichtigung der Stellgrößenbeschränkungen beim Reglerentwurf sowie die bessere Ausschöpfung der Stellgröße motivieren auch die Konstruktion von stückweise linearen und weichen strukturvariablen Regelungen. Diese werden aufgrund ihrer speziellen Stellung in dieser Arbeit in Abschnitt 2.3 detailliert beschrieben.

Die bisherige Übersicht konzentrierte sich auf Verfahren, die eher in der akademischen Welt entwickelt worden sind. Im Weiteren werden zwei ursprünglich aus der Industrie stammende und sich dort hoher Akzeptanz erfreuende Verfahren betrachtet. Es handelt sich um die sogenannten Antiwindup-Verfahren sowie die modellprädiktive Regelung. Die Grundidee bei den Antiwindup-Methoden ist es, wie in der Einführung angesprochen, zuerst einen linearen Regler unter Vernachlässigung der Stellgrößenbeschränkung zu entwerfen. Im Nachhinein wird dann versucht die unerwünschte Effekte wie große Überschwingungen und lange Ausregelzeiten, die aufgrund der Sättigung des Aktors auftreten, zu minimieren. Da solche Effekte zuerst bei Reglern mit Integralanteil (PI/PID) beobachtet wurden, werden sie als Integrator-Windup bezeichnet.

Die ersten Methoden zur Vermeidung vom Integrator-Windup sind eher heuristisch motiviert und auf das konkrete Problem angepasst [34, 39]. Die Stabilität wird selten betrachtet und ist im Allgemeinen nicht sichergestellt. Das Windup wird z. B. vermieden, indem die Differenz zwischen dem kommandierten und dem tatsächlichen Aktorsignal gebildet wird und gewichtet zum Eingang des integrierenden Anteils des PID-Reglers zurückgeführt wird. Die Wahl der Gewichtung erfolgt durch Simulationen des Verhaltens des geschlossenen Regelkreises.

Mit der Zeit ist erkannt worden, dass das Integrator-Windup ein Spezialfall eines generellen Problems ist. Wie in Abb. 2.1 veranschaulicht, kann das Windup als eine Diskrepanz zwischen dem aktuellen Prozesseingang \hat{u} und den Zuständen bzw. dem Ausgang des Reglers u , z. B. bei einer Sättigung des Aktors, betrachtet werden. Das Ziel der einzelnen Techniken ist die Wiederherstellung der Konsistenz. Zu diesem Zweck wird Information über die Nichtlinearität benötigt, die durch eine Messung oder Schätzung von \hat{u} gewonnen wird. Anhand dieser Information wird der

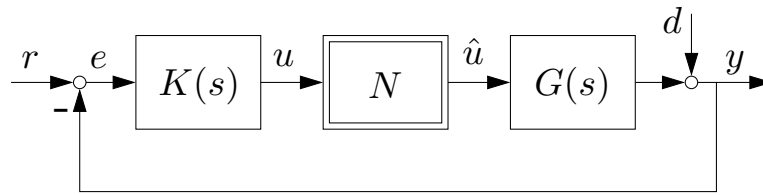


Abbildung 2.1: Diskrepanz zwischen dem Reglerausgang u und dem Eingang der Strecke \hat{u} aufgrund der Nichtlinearität N bei einem SISO-System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ [54]. Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet: r - Führungsgröße, e - Regelabweichung, y - Ausgangsgröße und d - Störung.

Regler $K(s)$ so modifiziert, dass eine bestimmte Regelgüte bei sichergestellter Stabilität erreicht wird. Die Verfahren unterscheiden sich hauptsächlich in der Art, wie diese Modifikation des Reglers erfolgt. Zu den bekanntesten gehören die “Generalized Anti Windup Control”-Verfahren, die “Conditioning Technique” von Hanus [34] und die so genannten beobachterbasierten Verfahren [8], wobei die “Conditioning Technique” als ein Spezialfall der beobachterbasierten Verfahren betrachtet werden kann [17]. Eine vereinheitlichte Darstellung zur Untersuchung von linearen zeitinvarianten Systemen, die aufgrund von Nichtlinearitäten Differenzen zwischen dem Reglerausgang und dem Systemeingang aufweisen, wird in [54] vorgestellt. Einen weiteren Schritt in die Richtung eines systematischen Antiwindup-Designs ermöglichen die LMI-Verfahren, die Anfang der 90er Jahre an Popularität gewannen. Die modernen Antiwindup-Verfahren ermöglichen einen systematischen Entwurf sowie die Sicherstellung einer bestimmter Regelgüte und der Stabilität (siehe z. B. [46]).

Die modellbasierte prädiktive Regelung (engl: model predictive control) stammt, wie bereits erwähnt, ursprünglich aus der Prozessindustrie und ist dort inzwischen weit verbreitet [55]. Das Grundprinzip ist in Abb. 2.2 veranschaulicht. Die beiden Hauptelemente dieser Regelung sind der Optimierer und das Modell des realen Prozesses. Das Modell wird in jedem Zeitschritt für die Vorhersage der zukünftigen Ausgänge innerhalb eines vorgegebenen Zeitfensters (Prädiktionshorizont) verwendet. Dies geschieht aufgrund der aus der Vergangenheit bekannten Ein- und Ausgangswerte und der durch den Optimierer berechneten zukünftigen Eingänge. Die vorhergesagten Ausgänge werden dann mit der gewünschten Referenztrajektorie verglichen. Die Aufgabe des Optimierers ist, die Abweichung zwischen den prädizierten Ausgängen und der Referenztrajektorie bei gegebenen Beschränkungen im Sinne einer Gütefunktion zu

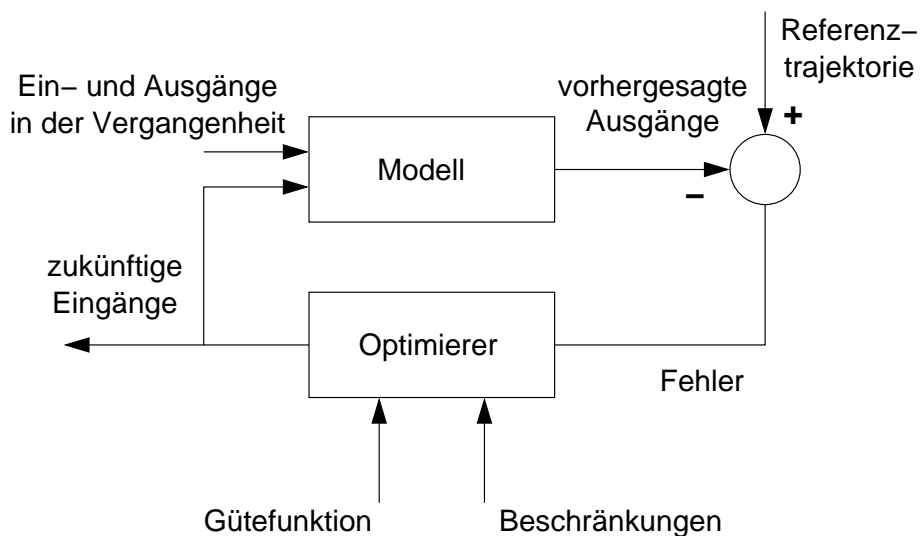


Abbildung 2.2: Grundstruktur einer modellbasierten prädiktiven Regelung nach [16].

minimieren. Dadurch lassen sich alle zukünftigen Eingänge innerhalb des Prädiktionshorizonts bestimmen. Die Eingänge für den nächsten Abtastschritt werden dem Aktor übergeben, und die restlichen Eingänge werden von dem Modell für die Vorhersage der Ausgänge des nachfolgenden Abtastschritts verwendet. Die Grundstruktur der Regelung erlaubt es, die wichtigsten Forschungs- und Entwicklungsrichtungen zu erkennen. Dabei geht es hauptsächlich darum, wie die Modellbildung erfolgt und wie sich die Schnelligkeit und Zuverlässigkeit des Optimierers verbessern lässt. Ein guter Einstieg in diese Themen bietet [71]. Als Hauptnachteil dieses Verfahrens wird der prinzipbedingte hohe Rechenaufwand angeführt, so dass dieses Verfahren nur bedingt auf hochdynamische Systeme angewendet werden kann.

2.3 Strukturvariable Regelungen

Die strukturvariablen Regelungen können bei verhältnismäßig geringem Entwurfsaufwand sehr gute Ausregelzeiten für Strecken mit Stellgrößenbeschränkungen erreichen. Da zwei Formen dieser Regelungen im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen, ist das Ziel des nächsten Abschnittes, einen Einblick in die geschichtliche Entwicklung dieser Art von Regelungen zu gewähren. Im Anschluss daran wird näher auf die strukturvariable Regelung mit abschnittsweise linearer Struktur von Kiendl und

Schneider [50, 52] und weiche strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen von Adamy [4] eingegangen. Der letzte Abschnitt 2.3.4 ist der weichen strukturvariablen Regelung mit mehrdeutigen Ljapunov-Funktionen [68] gewidmet.

2.3.1 Geschichtliche Entwicklung

Die ersten Regelungen, die zwischen mehreren Teilreglern umschalteten, wurden zwischen 1940 und 1960 entwickelt und waren meistens wie in [23] heuristisch motiviert. Unter bestimmten Bedingungen kann es bei diesen Reglern zu einem hochfrequenten Umschalten zwischen den Teilreglern kommen. Schaltende Regelungen, die man in diesem so genannten Gleitzustand betreibt, wurden ausführlich von Emeljanov und Utkin [21, 86] untersucht. Solche Regelungen sind vor allem deshalb interessant, da sie auf der Schaltgerade robust gegen Parameterschwankungen der Strecke und externe Störungen [96] sind. Das hochfrequente Umschalten zwischen den Teilreglern bringt natürlich auch Nachteile wie hohe Stellgliedbelastung, Energieverluste sowie die Anregung von höheren dynamischen Moden mit sich. Diese begrenzen die Anwendungsbereiche des Konzepts [30]. Wie sich die Nachteile beim Beibehalten der guten Robustheitseigenschaften vermeiden lassen, ist eine offene Frage [96].

In den 70er Jahren wurden schaltende Regelungen entwickelt, die einen Gleitzustand vermeiden. Dabei bestimmt eine von dem aktuellen Zustand abhängige Schaltvariable den jeweils aktiven Regler (siehe Abb. 2.3). Das Ziel ist, eine hohe, suboptimale Regelgüte zu erreichen, d. h., das dynamische Verhalten des geregelten Systems zu verbessern. Trotz ähnlicher Zielsetzung haben sich verschiedene Alternativen für die Wahl der Schaltstrategie entwickelt. Kiendl und Schneider [50, 52] erzielen Suboptimalität durch Einteilen des Zustandsraums in Gebiete mit beschränkter Stellgröße. Jedem Gebiet wird ein bezüglich eines vorgegebenen Gütemaßes optimaler Regler zugeordnet. In [9] wird dagegen eine optimale Schaltstrategie für strukturvariable Regelungen angestrebt. Becker zeigt, dass dieses Problem äquivalent zur Bestimmung des optimalen Regelungsgesetzes für ein bilineares System ist. Da sich dieses nur mit großem Aufwand bestimmen lässt, wird schließlich auch eine suboptimale Schaltstrategie verwendet. Bei anderen Algorithmen steht eher die Rechenzeit bzw. der Entwurfs- und Realisierungsaufwand im Vordergrund [4].

Die Idee, zum Erzielen einer höheren Regelgüte einen Regler mit ab-

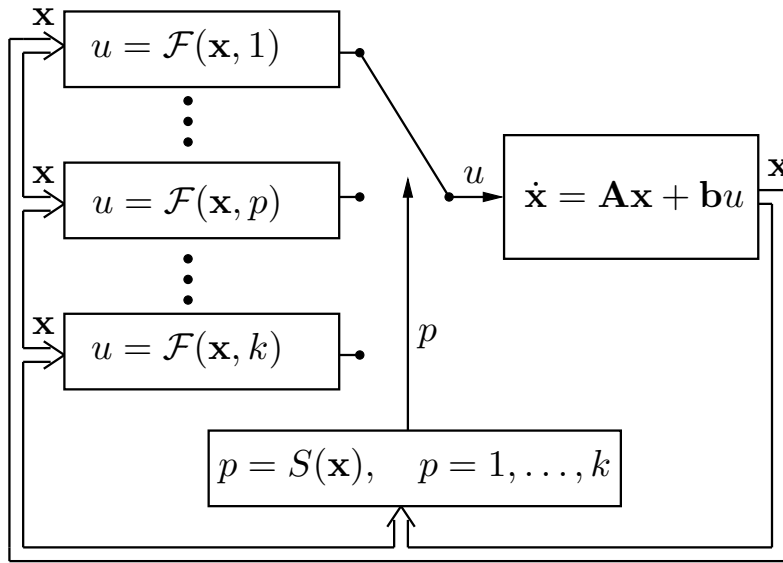


Abbildung 2.3: Strukturbild einer schaltenden strukturvariablen Regelung.

schnittsweise linearer Struktur⁵ zu verwenden, findet im englischsprachigen Raum erst nach der Publikation von Wredenhagen und Bélanger [93] Verbreitung. Ähnliche Ansätze sind danach in [38, 56, 74] zu finden. Sie alle haben die Besonderheit, dass eine Sättigung, ähnlich wie bei Kiendl und Schneider, vermieden wird. Dass sich die Regelgüte durch das Zulassen von Sättigung weiter verbessern lässt, haben erst Lin [60] und De Dona [19] unabhängig voneinander erkannt. Die Sättigung wird dort entweder durch eine Skalierung der Reglerkoeffizienten [60] oder durch das Zulassen eines bestimmten Sättigungsgrades [19] erreicht. Eine Kombination von beiden Varianten wird in [18] vorgeschlagen.

Die Regelungen mit einer abschnittsweise linearen Struktur, ob mit oder ohne Sättigung, haben alle den Nachteil, dass sie Sprünge im Stellgrößenverlauf aufweisen. Sie lassen sich, wie in der Einführung angedeutet, durch kontinuierliche Variation der Koeffizienten des Reglers vermeiden. Für diese Regelungen wird im Deutschen die von Franke [27] eingeführte Bezeichnung „weiche strukturvariable Regelungen“ verwendet. Sie haben die in Abb. 2.4 dargestellte Struktur. Die Koeffizienten des Reglers werden in Abhängigkeit vom Systemzustand \mathbf{x} und einer kontinuierlichen Selektionsstrategie $S(\mathbf{x}, p^{(n)}, \dots, p) = 0$ verändert, so dass

⁵Die Regler mit abschnittsweise linearer Struktur sind im Englischen unter der Bezeichnung „piecewise-linear control (PLC)“ zu finden. Das Gesamtsystem bestehend aus schaltenden Reglern und kontinuierlicher Strecke kann wie in [19] auch als ein Beispiel für ein hybrides System betrachtet werden.

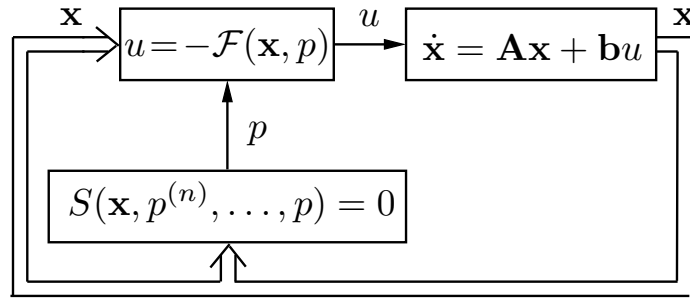


Abbildung 2.4: Strukturbild einer weichen strukturvariablen Regelung.

die zur Verfügung stehende Stellgröße möglichst gut ausgenutzt wird. Die Selektionstrategie ist das Hauptmerkmal, in dem sich die weichen strukturvariablen Regelungen unterscheiden.

Anfang der 80er Jahre zeigte Franke [25–28], dass sich die in der Regelung von Becker [9] auftretenden Sprünge im Stellgrößenverlauf und das Auftreten von unerwünschten Gleitzuständen durch eine dynamische Selektionsstrategie vermeiden lassen. Der Selektionsparameter p wird durch Lösen der Differentialgleichung $\dot{p} = f(p, \mathbf{x})$ bestimmt. Das Verfahren eignet sich dabei nicht nur für Eingrößen-, sondern auch für Mehrgrößensysteme mit konzentrierten oder verteilten Parametern [26]. Der Entwurf der Regelung für ein lineares Eingrößensystem mit konzentrierten Parametern wird in [3] beschrieben. Dieser erfolgt iterativ, wobei ein Teil der Parameter heuristisch festgelegt wird. Die restlichen Parameter können anschließend durch verschiedene Suchverfahren bestimmt werden.

Mit Syntheseverfahren für nichtlineare Zustandsregler unter Berücksichtigung von Begrenzungen beschäftigt sich auch Albers [6] in seiner Dissertation. Die Grundidee ist, zwei lineare Zustandsregler \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 zu benutzen, wobei der zweite verwendet wird, sobald \mathbf{k}_1 die Stellgröße nicht mehr vollständig ausnutzt. Der Selektionsparameter p kann explizit durch

$$p = \frac{u_s(\mathbf{x})}{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}} \text{sat} \left(1, \frac{\mathbf{k}_2^T \mathbf{x}}{u_s(\mathbf{x})} \right)$$

vorgegeben werden [3], wobei mit $u_s(\mathbf{x})$ eine zustandsabhängige Sättigung bezeichnet wird. Die Entwurfparameter sind \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 und die positiv-definite Matrix \mathbf{R} , die die Ljapunov-Funktion des Systems definiert. Sie lassen sich durch verschiedene Optimierungsverfahren (z. B. Evolutionsstrategie) bestimmen.

Bei Adamy [3, 4] ist der Selektionsparameter Lösung einer impliziten Gleichung. Da er auch eine Ljapunov-Funktion für das nichtlineare Sys-

tem definiert, spricht man von einer weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen. Deren Entwurf soll im Weiteren vereinfacht werden. Daher wird in Abschnitt 2.3.3 und Abschnitt 4.1 detailliert auf ihr Funktionsprinzip und ihren Entwurf eingegangen. An dieser Stelle ist jedoch zu erwähnen, dass die Entwurfparameter so gewählt werden, dass die Lösung der impliziten Gleichung existiert und eindeutig ist. Daher ist diese schnell und sicher lösbar, was der Hauptunterschied zu dem von Niewels vorgeschlagenen Verfahren [68] ist. Durch Zulassen von mehrdeutigen Ljapunov-Funktionen wird der Entwurf zwar vereinfacht (siehe Abschnitt 2.3.4), die Lösung der impliziten Gleichung und damit der Online-Berechnungsaufwand werden dafür jedoch höher.

Einfach gestaltet sich auch der Entwurf einer sättigenden weichen strukturvariablen Regelung [15]. Da der Selektionsparameter aber durch die Lösung einer Riccati-Gleichung iterativ bestimmt wird, ist der Aufwand für die Online-Berechnungen ebenfalls verhältnismäßig hoch.

Eine Regelung ohne Sprünge im Stellgrößenverlauf wird auch in Wredenhagen [92] vorgestellt. Das Umschalten der Teilregler am Rand der ineinander geschachtelten Gebiete wird vermieden, indem man zwischen den Zustandsrückführungen am Rand der jeweiligen Gebiete interpoliert. Die Stabilität des so entstandenen geschlossenen Systems ist, wie in [92] gezeigt, leicht zu garantieren. Um sicherzustellen, dass die Stellgrößenbeschränkung überall eingehalten wird, sind die Gebiete allerdings konservativer auszulegen, d. h., sie sind kleiner als bei einem Regler mit abschnittsweise linearer Struktur. Der Selektionsparameter nimmt hier im Unterschied zu den oben besprochenen Regelungen nur diskrete Werte an und wird beim Durchqueren einer Gebietsgrenze um jeweils eins erhöht.

Zu den weichen strukturvariablen Regelungen kann auch die in [78] vorgeschlagene Regelung zugeordnet werden. Das Funktionsprinzip ist ähnlich dem in [3, 4] beschriebenen Verfahren. Die Zustandsrückführung wird in Abhängigkeit vom aktuellen Systemzustand und einem zustandsabhängigen kontinuierlichen Parameter variiert, der implizit durch eine nichtlineare skalare Gleichung definiert ist. Bei geeigneter Wahl der parameterabhängigen Funktionen ist es möglich, diese wie in [44] explizit vorzugeben.

2.3.2 Regelungen mit abschnittsweise linearer Struktur

In diesem Abschnitt wird das Funktionsprinzip der Regelung mit abschnittsweise linearer Struktur nach Kiendl und Schneider [50, 52] vorge-

stellt. Dafür wird in Kap. 5 ein neues, auf linearen Matrixungleichungen basierendes Verfahren entwickelt. Im Allgemeinen wird eine solche Regelung durch eine Familie von linearen Reglern \mathbf{k}_p und eine Familie von den Reglern zugeordneten, ineinander geschachtelten Ljapunov-Gebieten $\mathcal{G}_p = \{\mathbf{x} \mid v_p(\mathbf{x}) < c_p\}$ festgelegt, wobei v_p die entsprechende Ljapunov-Funktion ist und c_p die Größe des Gebiets bestimmt⁶. Dabei werden die Gebiete \mathcal{G}_p anhand des Parameters c_p so skaliert, dass sie die Stellgrößenbegrenzung $|\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}| \leq u_{\max}$ tangieren. Damit wird sichergestellt, dass für bestimmte Zustände am Rand des Gebiets \mathcal{G}_p die Stellgröße vollständig ausgenutzt wird. Obwohl die einzelnen Regler linear sind, entsteht so in der Gesamtheit ein nichtlinearer Regler. Der Vorteil des Ansatzes ist, dass man wegen der linearen Teilregler bei Analyse und Entwurf der Regelungen auf die lineare Regelungstheorie zurückgreifen kann.

Bei quadratischen Ljapunov-Funktionen $v_p = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}$ sind die Gebiete ineinander geschachtelte n-dimensionale Ellipsoide (siehe Bild 2.5). Der

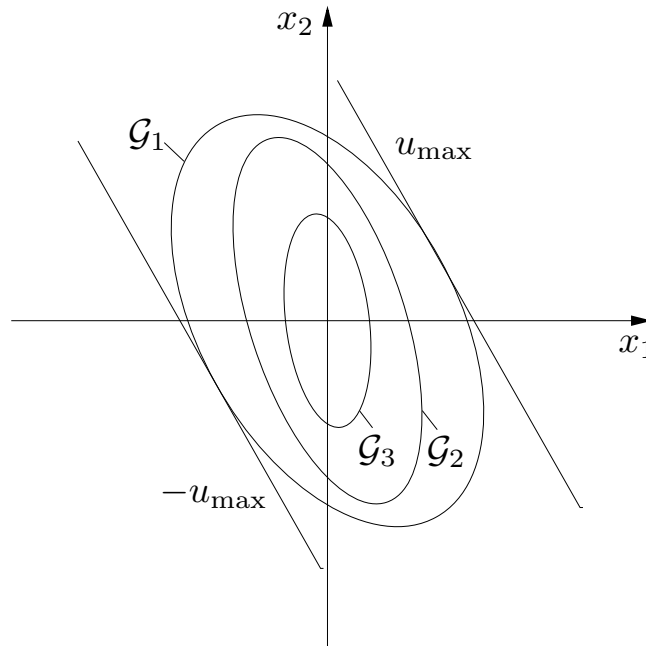


Abbildung 2.5: Familie von ineinander geschachtelten Ljapunov-Gebieten bei einem 2-dimensionalen System.

Skalierungsfaktor c_p lässt sich in diesem Fall durch Lösen des Optimierungsproblems $\max \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}$ unter der Nebenbedingung $\pm \mathbf{k}_p^T \mathbf{x} = u_{\max}$ bestimmen.

⁶ Sobald sich eine Trajektorie in einem Ljapunov-Gebiet \mathcal{G}_p befindet, kann sie dieses nicht mehr verlassen.

Um die Stellgröße besser auszuschöpfen, wird zwischen den Reglern so umgeschaltet, dass in jedem Gebiet $\mathcal{G}_p \setminus \mathcal{G}_{p+1}$ der Regler \mathbf{k}_p aktiv ist. Bei dem zweidimensionalen Beispiel in Abb. 2.5 ist innerhalb des Gebiets $\mathcal{G}_1 \setminus \mathcal{G}_2$ der Regler \mathbf{k}_1 , in $\mathcal{G}_2 \setminus \mathcal{G}_3$ \mathbf{k}_2 und in der inneren Ellipse \mathcal{G}_3 \mathbf{k}_3 aktiv. Der Selektionsparameter $p \in \mathbb{N}$ ist monoton steigend und gibt an, welcher Regler momentan aktiv ist. Beim Durchqueren einer Gebietsgrenze wird er um eins erhöht. Bei einer Zunahme des Selektionsparameters p werden die Regler schneller.

Da die Ellipsen Ljapunov-Gebiete sind, ist sichergestellt, dass die Trajektorien nie die Ellipse verlassen, in der sie sich befinden. Daher ist das Auftreten von Gleitzuständen nicht möglich. Durch die Schachtelung dieser Ellipsen wird eine eindeutige Zuordnung eines Gebiets zum jeweiligen zugehörigen Regler erreicht.

Eine Regelung mit abschnittsweise linearer Struktur kann die gewünschte Ruhelage schneller als eine lineare Regelung erreichen (siehe z. B. [93]). Von Nachteil sind jedoch der höhere Entwurfsaufwand und der diskontinuierliche Stellgrößenverlauf. Werden die Gebiete des abschnittsweise linearen Reglers unendlich dicht geschachtelt, können diese Unstetigkeiten vermieden werden. Diese Idee wird im nächsten Abschnitt verfolgt.

2.3.3 Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen

Die weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen [3, 4] ist eine systematische Weiterentwicklung der im vorigen Abschnitt beschriebenen Regelung mit abschnittsweise linearer Struktur. Durch eine infinitesimal dichte Schachtelung der Ljapunov-Gebiete wird ein kontinuierlicher Verlauf des Selektionsparameters erreicht, wodurch sich die Sprünge im Stellgrößenverlauf vermeiden lassen.

Anstelle einer Familie von endlich vielen Reglern haben wir hier ein Kontinuum von linearen Zustandsrückführungen $\mathbf{k}(p)$. Sie sind so zu wählen, dass das geregelte System stabil ist.

Jedem Regler wird hier ebenfalls ein Ljapunov-Gebiet $\mathcal{G}(p)$ zugeordnet. Dabei soll für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{G}(p)$ die Beschränkung $|\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}| \leq u_{\max}$ gelten. Als Ljapunov-Gebiete werden n -dimensionale Ellipsoide

$$\mathcal{G}(p) = \{\mathbf{x} \mid g(p, \mathbf{x}) = e(p)\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x} - 1 < 0\}, \quad (2.5)$$

$$e(p) = \frac{\mathbf{k}(p)^T \mathbf{R}^{-1}(p) \mathbf{k}(p)}{u_{\max}^2} \quad (2.6)$$

benutzt. Das Polynom $e(p)$ ist ein Skalierungsfaktor, der die Ellipsoide so skaliert, dass sie die Hyperebenen $|\mathbf{k}^T(p)\mathbf{x}| = u_{\max}$ tangieren.

Man betrachtet nun den stetig von \mathbf{x} abhängigen Selektionsparameter p , der implizit durch die Gleichung $g(p, \mathbf{x}) = e(p)\mathbf{x}^T \mathbf{R}(p)\mathbf{x} - 1 = 0$ vorgegeben ist. Bei geeigneter Wahl⁷ der Funktion $g(p, \mathbf{x})$ stellt p eine implizit definierte Ljapunov-Funktion des geregelten Systems dar [3, 4]. Deswegen wird p im Weiteren wie in [3] mit v bezeichnet. Dies ist eine für Ljapunov-Funktionen übliche Bezeichnung.

Die Struktur der Regelung ist in Bild 2.6 dargestellt. Es ist daran zu erkennen, dass die implizite Gleichung $g(v, \mathbf{x}) = 0$ in jedem Abtastschritt gelöst werden muss. Sie ist aber immer sicher und schnell mittels eines Bisektionsverfahrens lösbar [3, 4], wenn sichergestellt ist, dass eine eindeutige Lösung existiert. Das implizite Auswahlgesetz $g(v, \mathbf{x}) = 0$ stellt in diesem Fall praktisch keinen Nachteil gegenüber einem expliziten dar.

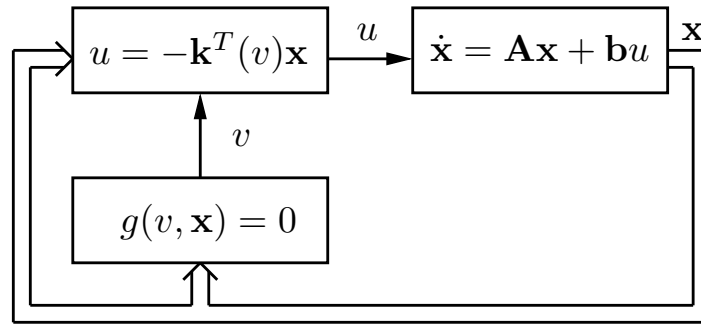


Abbildung 2.6: Struktur einer weichen strukturvariablen Regelung mit impliziter Ljapunov-Funktion.

Das geregelte System sieht dann folgendermaßen aus:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(v))\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}(v)\mathbf{x}. \quad (2.7)$$

Die Aufgabe ist es jetzt, $\mathbf{k}(v)$ und $\mathbf{R}(v)$ so zu bestimmen, dass das geregelte System stabil ist, die Ljapunov-Gebiete infinitesimal dicht ineinander geschachtelt sind und die implizite Gleichung $g(v, \mathbf{x}) = 0$ eindeutig lösbar ist. Der konkrete Entwurf wird in Abschnitt 4.1 erläutert.

2.3.4 Regelung mit mehrdeutigen Ljapunov-Funktionen

Die weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen wird in Niewels [68, 69] weiterentwickelt. Er verzichtet auf

⁷Siehe Satz (4.1).

die infinitesimal dichte Schachtelung der Gebiete. Für einen Regler mit abschnittsweise linearer Struktur ist das Ergebnis in Abb. 2.7 visualisiert. In diesem Fall, anders als bei ineinander geschachtelten Gebieten, können die Trajektorien, die in einem Gebiet starten, dieses vorübergehend verlassen [68]. Die Stabilität kann aber trotz der fehlenden Invarianz der Gebiete mittels mehrdeutiger Ljapunov-Funktionen sichergestellt werden.

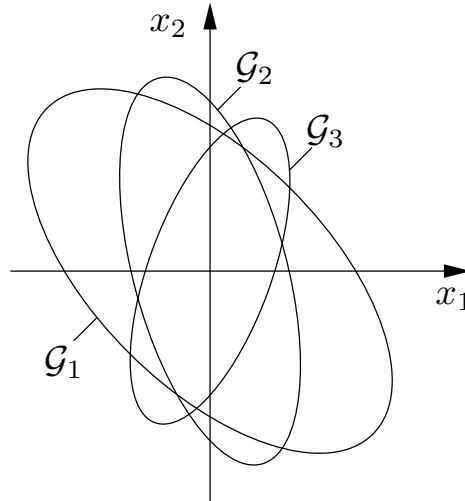


Abbildung 2.7: Familie von Ljapunov-Gebieten eines Reglers mit abschnittsweise linearer Struktur beim Verzicht auf eine Schachtelung der Gebiete.

Die mehrdeutigen Ljapunov-Funktionen werden erstmals in [51] vorgeschlagen und in [68] nochmals ausführlich erklärt. Über mehrdeutige Funktionen spricht man dann, wenn einem Argument x mehrere Funktionswerte $y(x)$ zugeordnet werden. Dies ist z. B. bei Umkehrung einer nicht streng monotonen Funktion der Fall. Da die implizite Darstellung von mehrdeutigen Funktionen der Darstellung von eindeutigen Funktionen entspricht, lässt sich die mehrdeutige Ljapunov-Funktion in unserem Fall als $v(x) = \{v \in (0, 1] \mid g(v, \mathbf{x}) = 0\}$ definieren, wobei für ein gegebenes \mathbf{x} mehrere Werte für v zugelassen sind. Diese Werte dienen wie im vorigen Abschnitt auch als Selektionsparameter. Da jetzt für ein festgelegtes \mathbf{x} mehrere Selektionsparameter bzw. lineare Regler $\mathbf{k}(v)$ möglich sind, ist die Stellgröße u nicht mehr eindeutig bestimmt. Das Problem wird in [68] umgangen, indem immer der kleinste Wert $v_{\min}(\mathbf{x})$ verwendet wird. Diese Wahl ist zwingend für den Stabilitätsnachweis und erscheint sinnvoll auch aus der Tatsache heraus, dass die Regler für kleinere Werte von v stärker werden und damit zu besserer Regelgüte führen.

Die Einführung von mehrdeutigen Ljapunov-Funktionen führt zu einer deutlichen Reduzierung des Entwurfsaufwands, da durch den Verzicht auf die Schachtelung der Gebiete auch die für den Entwurf kritische Bedingung (4.20) (siehe Abschnitt 4.2) wegfällt. Dafür steigt jedoch der Aufwand bei der Online-Berechnung der Lösung der impliziten Gleichung, die bei Adamy [4] schnell mittels eines Einschlussverfahrens ermittelt werden kann⁸. Leider können solche Verfahren bei vorliegender Mehrdeutigkeit weder garantieren, dass die minimale Lösung gefunden wird, noch dass eine Lösung überhaupt gefunden wird [68].

Niewels löst dieses Problem, indem er ein erweitertes Bisektionsverfahren benutzt. Im ersten Schritt wird die Anzahl der Nullstellen im Intervall $(0, 1]$ mithilfe des Sturm'schen Theorems [14] bestimmt. Dieses wird dann mittels eines einfachen Bisektionsverfahrens solange unterteilt, bis man schließlich das Intervall mit der kleinsten Nullstelle bekommt. Im zweiten Schritt kann diese Nullstelle wie beim Regler nach Adamy mittels eines schnell konvergierenden Einschlussverfahrens bestimmt werden. Der deutlich größere numerische Aufwand entsteht hier durch die Bestimmung der sogenannten Sturm'schen Kette⁹, die zu jedem Abtastzeitpunkt mehrmals berechnet werden muss. Die Verwendung des Newton-Verfahrens kann die Rechenzeit minimieren. Es ist aber nicht sichergestellt, dass der Algorithmus in diesem Fall stets gegen die kleinste Lösung konvergiert. Deswegen wird in [68] vorgeschlagen, das erweiterte Bisektionsverfahren mit dem Newton-Verfahren zu kombinieren. Die Kombination wird allerdings nicht genauer spezifiziert.

Um sich diese aufwendigere Berechnung der Selektionsparameter zu ersparen, wird in dieser Arbeit versucht, den Entwurf der weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen unter Beibehalten der Schachtelungsbedingung zu vereinfachen. Ein weiterer Vorteil eines Verfahrens mit eindeutigen Ljapunov-Funktionen ist die einfachere mathematische Handhabbarkeit (z. B. beim Stabilitätsbeweis), die den Einblick in die Funktionsweise des Verfahrens erleichtert.

⁸Eine Übersicht der wichtigsten Einschlussverfahren findet man in [22]. Der bekannteste Vertreter dieser Klasse von Verfahren ist das Bisektionsverfahren.

⁹Die Sturm'sche Kette ist eine Folge von Funktionen, die bei der Bestimmung der Anzahl der Nullstellen einer Funktion $f(x)$ Verwendung findet. Sie besteht aus den Funktionen $f(x), f'(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_m = \text{const} \neq 0$, wobei $f_1(x) = -(f(x) \bmod f'(x))$, $f_2(x) = -(f'(x) \bmod f_1(x))$ usw. Das letzte Element der Folge muss konstant und verschieden von null sein [14].

2.4 Ziele dieser Arbeit

Der Überblick der Methoden zum Umgang mit Stellgrößenbeschränkungen zeigt, dass sich für das in Abschnitt 2.1 gestellte Problem mehrere Lösungsmöglichkeiten anbieten. Dabei bieten einige strukturvariable Regelungen einen guten Kompromiss zwischen Aufwand für Online-Berechnungen, Regelgüte und Entwurfsaufwand. Da sich die Bestimmung einer linearen Zustandsrückführung trotzdem einfacher gestaltet, stellt sich die Frage, ob und wie sich der Entwurfsaufwand auch bei einer strukturvariablen Regelung verringern lässt.

Das primäre Ziel dieser Arbeit ist daher, den bisher bekannten Entwurf weicher strukturvariabler Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen (siehe Abschnitt 4.1) zu vereinfachen und zu beschleunigen. Dabei soll der Aufwand für Online-Berechnungen möglichst gering bleiben.

Die Grundidee besteht darin, das ursprüngliche Optimierungsproblem (4.16) in ein konvexes Problem umzuwandeln. Solche Probleme lassen sich sehr schnell und einfach mittels Innere-Punkte-Verfahren lösen. Dadurch lassen sich weitere Ziele der Arbeit definieren. Dabei soll im Detail geklärt werden,

- ob und wie sich die Nebenbedingungen des ursprünglichen Problems in LMI-Form darstellen lassen und
- wie konservativ diese Darstellung ist.

Ein konvexes Optimierungsproblem setzt voraus, dass nicht nur die Menge der zulässigen Parameter, sondern auch die Gütefunktion konvex ist. Daher ist

- eine sinnvolle konvexe Gütefunktion zu wählen.

Ferner ist zu untersuchen,

- ob die Menge der zulässigen Parameter immer unterschiedlich von der leeren Menge ist und
- inwieweit die Ergebnisse auf den Regler mit abschnittsweise linearer Struktur aus [50, 52] übertragbar sind.

3 Lineare Matrixungleichung: Einführung

Viele in der Systemdynamik und Regelungstechnik auftretende Probleme lassen sich durch Anwendung von linearen Matrixungleichungen (engl. Linear Matrix Inequalities (LMIs)) als konvexe oder quasi-konvexe Optimierungsprobleme formulieren [12]. Die Darstellung von regelungstechnischen Problemen als LMIs erfreut sich großer Beliebtheit, da sehr effiziente numerische Verfahren existieren, durch die ein LMI-Problem schnell und zuverlässig gelöst werden kann [12, 88]. Ein weiterer Grund ist die Tatsache, dass sich viele der in der Regelungstechnik vorkommenden Ungleichungen - lineare und konvexe quadratische Ungleichungen, Matrixnorm-Ungleichungen, Ljapunov- und Riccati-Ungleichungen - einfach in LMIs überführen lassen. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass LMIs auch beim Entwurf von strukturvariablen Regelungen eingesetzt werden können.

Da die Umformungen in den nächsten Kapiteln Vorkenntnisse über LMIs voraussetzen, wird hier eine kurze Einführung in das Thema gegeben. Für Leser, die sich weiter darin vertiefen möchten, ist das Tutorium [87] sehr empfehlenswert. In diesem werden die theoretischen Grundlagen anhand vieler Beispiele erläutert. Ferner bietet [12] eine sehr ausführliche Beschreibung der linearen Matrixungleichungen und deren Anwendungen in der Regelungstechnik, so dass es sich als Standardwerk auf dem Gebiet etabliert hat.

Die Einführung beginnt mit einer Definition des Begriffs „LMI“ in Abschnitt 3.1. Dann werden in Abschnitt 3.2 einige Eigenschaften und Sätze vorgestellt, die in späteren Kapiteln benötigt werden. Mit einer Übersicht möglicher Lösungsmethoden und einer Vorstellung der bei den Simulationen in dieser Arbeit verwendeten Software wird die Einführung in Abschnitt 3.3 abgeschlossen.

3.1 Definition

Eine lineare Matrixungleichung ist wie folgt definiert:

Definition 3.1 *Gegeben ist die affine Funktion*

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i,$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Die symmetrischen Matrizen $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, 1, \dots, m$ sind vorgegeben. Die Ungleichung

$$\mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i \succ 0 \quad (3.1)$$

wird als lineare Matrixungleichung bezeichnet. Dabei bedeutet die Notation $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0$, dass die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ positiv definit ist.

Die Ungleichung (3.1) wird als strikte LMI bezeichnet. Ist gefordert, dass $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0$, also $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ positiv semidefinit ist, handelt es sich um eine nicht strikte Ungleichung. Diese lässt sich aber stets in eine äquivalente strikte LMI umformen [12]. Daher werden im Weiteren nur strikte LMIs betrachtet.

Es ist auch zu vermerken, dass statt der in der Definition verwendeten kanonischen Form häufig eine andere Darstellung verwendet wird. Die unbekannten Parameter sind in diesem Fall in Matrizen zusammengefasst. Um die Stabilität des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sicherzustellen, wird z. B. gefordert, dass eine Matrix \mathbf{R} existiert, für die die Ungleichungen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{A} \prec 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{R} \succ 0 \quad (3.3)$$

erfüllt sind. Keine von den beiden Matrixungleichungen liegt in der kanonischen Form vor. Sie lassen sich aber, wie im Weiteren gezeigt, in diese überführen. Zu diesem Zweck wird die symmetrische Matrix $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bzgl. einer neuen Basis $\{\mathbf{E}^{ij} : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \geq j\}$ dargestellt. Jede der $n(n+1)/2$ Basismatrizen nimmt an den Stellen (i, j) und (j, i) den Wert eins an. Die restlichen Werte sind null. Die Matrix \mathbf{R} lässt sich dann als

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n r_{ij} \mathbf{E}^{ij}$$

darstellen, wobei mit r_{ij} das (i, j) -te Element der Matrix \mathbf{R} bezeichnet wird. Die Ungleichung (3.2) ist dann äquivalent zur Ungleichung

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n r_{ij} (\mathbf{A}^T \mathbf{E}^{ij} + \mathbf{E}^{ij} \mathbf{A}) \prec 0,$$

die die gewünschte Form (3.1) hat. Diese Umformung ist jedoch in der Regel nicht notwendig, da die meisten Programme zur Lösung von LMI-Problemen die Schreibweise (3.2) unterstützen.

Ferner ist interessant zu erwähnen, dass sich hinter der LMI (3.1) ein System polynomialer skalarer Ungleichungen verbirgt. Dies ist einfach zu erkennen, indem man auf die Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ das aus der linearen Algebra bekannte Ergebnis überträgt, dass eine reelle symmetrische Matrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

genau dann positiv definit ist, wenn alle Hauptminoren von \mathbf{S}

$$s_{11}, \det \left(\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} \right), \dots, \det \left(\begin{bmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1n} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

positiv sind. Während die Forderung, dass der erste Minor positiv ist, eine lineare Ungleichung in den Variablen x_i darstellt, so muss bei dem zweiten eine quadratische und dem n -ten eine polynomiale Ungleichung der Ordnung n erfüllt werden.

3.2 Eigenschaften und Lemmata

Wie schon erwähnt, liegt einer der Hauptvorteile der LMIs darin, dass effiziente numerische Verfahren zu deren Lösung existieren. Diese benutzen zwei grundlegende Eigenschaften der LMIs: erstens, dass die Menge $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0\}$ konvex ist, und zweitens, dass ein System von LMIs als eine einzelne LMI zu betrachten ist.

Dass die Menge $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0\}$ konvex ist, lässt sich durch die direkte Anwendung der folgenden Definition zeigen:

Definition 3.2 Eine Menge \mathcal{C} ist konvex, wenn für jedes Element $e_1, e_2 \in \mathcal{C}$ und jedes $s \in (0, 1)$ auch das Element $se_1 + (1 - s)e_2$ zur Menge \mathcal{C} gehört.

Anschaulich erklärt bedeutet dies, dass jede Verbindungslinie zwischen zwei beliebigen Punkten der Menge \mathcal{C} auch in dieser Menge \mathcal{C} liegt. Um die Konvexität der Menge $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0\}$ zu zeigen, werden also zwei beliebige Vektoren \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 gewählt, so dass die Bedingungen $\mathbf{F}(\mathbf{x}_1) \succ 0$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}_2) \succ 0$ gelten. Es ist nun zu zeigen, dass für ein beliebiges $s \in (0, 1)$ auch $\mathbf{F}(s\mathbf{x}_1 + (1 - s)\mathbf{x}_2) \succ 0$ gilt. Nach Anwendung der Definition 3.1 ergibt sich wegen der Linearität des Summenoperators folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s\mathbf{x}_1 + (1 - s)\mathbf{x}_2) &= \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m (sx_{1i} + (1 - s)x_{2i})\mathbf{F}_i \\ &= s\mathbf{F}_0 + s \sum_{i=1}^m x_{1i}\mathbf{F}_i + (1 - s)\mathbf{F}_0 + (1 - s) \sum_{i=1}^m x_{2i}\mathbf{F}_i \\ &= s\mathbf{F}(\mathbf{x}_1) + (1 - s)\mathbf{F}(\mathbf{x}_2) \succ 0. \end{aligned}$$

Damit ist sichergestellt, dass die Menge $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0\}$ konvex ist.

Dass mehrere LMIs einfach zu einer zusammengefasst werden können, lässt sich am besten anhand eines einfachen Beispiels zeigen. Gegeben seien die Ungleichungen $\mathbf{A} \succ 0$ und $\mathbf{B} \succ 0$. Sie sind offensichtlich äquivalent zur Ungleichung

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \succ 0,$$

da die Eigenwerte von \mathbf{C} aufgrund der Diagonalblockstruktur identisch mit den Eigenwerten von \mathbf{A} und \mathbf{B} sind. Die Matrix \mathbf{C} ist also genau dann positiv definit, wenn \mathbf{A} und \mathbf{B} ebenfalls positiv definit sind. Es gibt daher keinen Unterschied zwischen einem System von LMIs und einer einzelnen LMI.

Häufig ist schwer zu erkennen, dass eine Menge diese wünschenswerten Eigenschaften besitzt, da die meisten Probleme normalerweise nicht direkt in LMI-Form vorliegen. Es sind meistens verschiedene Transformationen und Substitutionen notwendig, um eine LMI-Darstellung zu erreichen. Zur Umformung des Entwurfs von strukturvariablen Regelungen in ein LMI-Problem werden beispielsweise das Schur-Komplement-Lemma,

ein Variablenwechsel und einige weitere Transformationen benötigt. Im Folgenden wird auf diese näher eingegangen.

Die LMIs sind im Allgemeinen nicht eindeutig, d. h., die gleiche Lösungsmenge lässt sich durch verschiedene LMIs beschreiben. Falls $\tilde{\mathbf{M}}$ regulär ist, ergibt sich direkt aus der Definition einer positiv definiten Matrix ($\mathbf{A} \succ 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) folgende Gleichung:

$$\mathbf{A} \succ 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{M}} \succ 0. \quad (3.4)$$

Es handelt sich um eine Kongruenztransformation, die oft im Zusammenhang mit einem Variablenwechsel zur Eliminierung bilinearer Terme verwendet wird, was z. B. beim Reglerentwurf für lineare Strecken benötigt wird. Es ist bekannt, dass ein geschlossener Regelkreis asymptotisch stabil ist, wenn für das mit $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ geregelte System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ eine symmetrische Matrix \mathbf{R} existiert, so dass folgende Ungleichungen gelten:

$$\mathbf{R} \succ 0 \quad \text{und} \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T \mathbf{R} + \mathbf{R}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) \prec 0.$$

Die zweite Ungleichung ist offensichtlich nichtlinear in den unbekannten Variablen \mathbf{K} und \mathbf{R} . Die Ungleichungen lassen sich aber nach Durchführung der Transformation (3.4) mit $\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{R}^{-1}$ und Einführen der Variablen $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^{-1}$ und $\mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{Q}$ als

$$\mathbf{Q} \succ 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{Q} - \mathbf{B}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{B}^T \prec 0$$

schreiben. Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass das Problem jetzt linear in den unbekannten Variablen \mathbf{Q} und \mathbf{Y} ist.

In vielen regelungstechnischen Anwendungen stößt man schnell auf nichtlineare, aber konvexe Matrixungleichungen. Deren Lösung lässt sich durch eine Umformung in LMI-Form deutlich einfacher bestimmen. Häufig wird bei dieser Umformung das Schur-Komplement-Lemma benötigt:

Lemma 3.1 *Die Ungleichungen*

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) \succ 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x})^T \succ 0 \quad (3.5)$$

sind äquivalent zur LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.6)$$

Dabei sind die Matrizen $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ affine Funktionen in \mathbf{x} . Die Matrizen $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ sind symmetrisch.

Beweis: Wegen der Äquivalenz (3.4) soll für jede reguläre Matrix $\tilde{\mathbf{M}}$ mit der entsprechenden Dimension

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \succ 0 \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{M}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}} \succ 0 \quad (3.7)$$

gelten. Sei

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{x})^T \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

wobei die Einheitsmatrizen \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 von der Dimensionalität den Matrizen $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ entsprechen. Die Transformation (3.4) liefert dann:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_1 & -\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\mathbf{x}) & \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} \succ 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \succ 0. \quad (3.9)$$

Die Blockmatrix in Gl. (3.9) ist genau dann positiv definit, wenn $\mathbf{R}(\mathbf{x}) \succ 0$ und $\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \succ 0$. Damit ist die Äquivalenz zwischen Gl. (3.5) und Gl. (3.6) bewiesen. \square

Weitere Sätze und Lemmas, die bei der Umformung eines Problems in LMI-Form eingesetzt werden können, sind in [12] zusammengefasst.

3.3 Lösungsverfahren

Die Lösung eines LMI-Problems lässt sich im Allgemeinen nur numerisch bestimmen. In kanonischer Darstellung hat das Problem folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{für } & \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Häufig wird dafür auch der Begriff „semidefinites Programm“ verwendet. Die semidefiniten Programme sind eine spezielle Klasse konvexer Optimierungsprobleme.

Wegen der linearen Gütefunktion scheint diese Form auf den ersten Blick nicht besonders allgemein. Sie kann aber viele wichtige konvexe Optimierungsprobleme beschreiben [88]. Dies lässt sich am Beispiel der

Minimierung des maximalen Eigenwerts einer Matrix veranschaulichen. Das ursprüngliche Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{eig}(\mathbf{A}(\mathbf{x})), \\ \text{für } & \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0 \end{aligned}$$

ist äquivalent zu dem semidefiniten Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{für } & \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & t\mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

Das semidefinite Programm (3.10) hat große Ähnlichkeit mit einem linearen Programm¹, wobei die Ungleichungen zwischen den Komponenten der Vektoren mit Ungleichungen zwischen Matrizen ersetzt werden. Deswegen lassen sich die meisten in der linearen Programmierung verwendeten Verfahren auf semidefinite Programme erweitern. Es sind jedoch drei wichtige Unterschiede zu beachten: die Menge zulässiger Lösungen ist konvex, aber nicht unbedingt polyederförmig, wie dies bei einem linearen Programm der Fall ist. Zusätzlich sind die Dualitätsergebnisse (siehe Angang A.4) schwächer und es existiert kein praktisch anwendbares Simplex-Verfahren für semidefinite Programme [88].

Der älteste Algorithmus zur Lösung von semidefiniten Programmen ist die Ellipsoidmethode [11, 12]. Die Grundidee ist, eine Reihe $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$ von Ellipsoiden zu generieren, so dass der optimale Punkt, falls dieser existiert, sich immer im Inneren des aktuellen Ellipsoids befindet. Weiterentwickelte Versionen des Verfahrens können außerdem nicht zulässige Begrenzungen herausfinden. Hier wird aber nur der Fall betrachtet, in dem die zulässige Menge nicht leer und beschränkt ist und innerhalb dieser Menge mindestens ein Optimalpunkt existiert. Im ersten Schritt wird ein Ellipsoid \mathcal{E}_0 mit minimalem Volumen konstruiert, der das Optimum enthält. Oft umfasst dieses Ellipsoid wie in Abb. 3.1 die zulässige Menge. Dann wird durch die Mitte des Ellipsoids eine Ebene konstruiert, die das Ellipsoid in zwei Halbräume teilt, so dass sich das Optimum garantiert innerhalb eines der beiden Halbräume befindet, z. B. innerhalb des hellgrauen Bereichs der Ellipse \mathcal{E}_0 im Bild. Dann wird ein neues

¹Ein lineares Programm hat die Form

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{für } & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

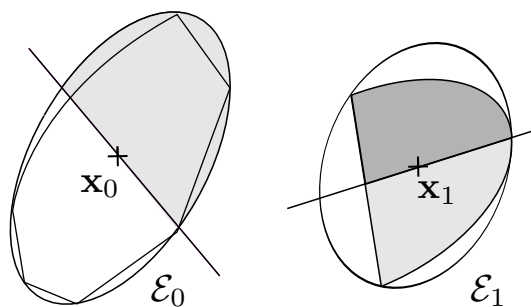


Abbildung 3.1: Ellipsoidmethode - Illustration des ersten Iterationsschrittes. Das Optimum befindet sich im Inneren des aktuellen Ellipsoids.

Ellipsoid \mathcal{E}_1 mit minimalem Volumen gebildet, das den Halbraum mit dem Optimum umfasst. Die Prozedur wird so lange wiederholt, bis das Optimum gefunden wird. Es lässt sich zeigen, dass das Volumen der Ellipsoiden geometrisch abnimmt. Diese Eigenschaft wird bei der Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit benutzt. Das Optimierungsproblem ist im ungünstigsten Fall in polynomialer Zeit² lösbar [12].

In der Praxis haben sich allerdings die sogenannten Innere-Punkte-Verfahren durchgesetzt. Deren theoretische Konvergenz ist im schlechtesten Fall zwar nicht bedeutend besser als die der Ellipsoidmethode, ihre tatsächliche Konvergenzgeschwindigkeit ist aber normalerweise deutlich höher als die theoretische Abschätzung. Sie wurden unter den Forschern populärer, nachdem Karmarkar [48] 1984 einen neuen polynomialen Algorithmus zum Lösen von linearen Programmen präsentiert hatte. Im Unterschied zum in der linearen Optimierung gängigen Simplex-Algorithmus, der die optimale Lösung findet, indem er am Rand des zulässigen Gebiets bleibt³, wird bei den Innere-Punkte-Verfahren in Richtung des steilsten Abstiegs eine Reihe von Punkten im Inneren des zulässigen Gebiets berechnet, die gegen die optimale Lösung konvergiert. Diese Methode lässt sich im Gegensatz zur Simplex-Methode durch einige Erweiterungen einfach zur Lösung von semidefiniten Programmen [7, 67] und sogar allgemein von beliebigen konvexen Problemen [67] anpassen.

Heutzutage gibt es eine Vielfalt von Innere-Punkte-Verfahren für semi-

²Ein Problem ist in polynomialer Zeit lösbar, wenn die benötigte Rechenzeit mit der Problemgröße nicht stärker als mit einer Polynomfunktion zunimmt.

³In der linearen Optimierung ist die zulässige Menge normalerweise polyederförmig, und ein optimaler Punkt befindet sich immer in einer der Ecken des Polyeders. Beim Simplex-Algorithmus bewegt man sich daher immer am Rand des zulässigen Gebiets, von der aktuellen Ecke zu einer benachbarten Ecke mit besserem Zielfunktionswert, bis ein Optimum erreicht wird.

definite Programme. Eine ausführliche Bibliographie findet sich in [91]. Alle Varianten haben gemeinsam, dass sie das Optimum des restringierten Optimierungsproblems (3.10) finden, indem sie eine Serie von Problemen mit oder ohne lineare Nebenbedingungen lösen. Dabei wird bei der Optimumssuche oft neben dem ursprünglichen Problem (3.10), das auch als primales Problem bezeichnet wird, auch das duale Problem⁴

$$\begin{aligned} \max \quad & -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) \\ \text{für} \quad & \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{Z} \succeq 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

betrachtet. Der Mehraufwand wird damit begründet, dass die optimale Lösung des dualen Problems d^* eine Grenze für die optimale Lösung des primalen Problems p^* darstellt und umgekehrt. Die parallele Betrachtung beider Probleme erlaubt daher eine Aussage darüber, wann das Optimum erreicht ist und die Optimierung abgebrochen werden kann. Je nachdem, ob das Verfahren in jeder Iteration primal, dual oder primal und dual zulässige Lösungen sucht, unterscheidet man primale, duale und primal-duale Verfahren.

Der Zusammenhang zwischen der dualen und primalen Lösung wird im Folgenden genauer betrachtet. Angenommen \mathbf{Z} sei dual und \mathbf{x} primal zulässig, kann die Differenz η zwischen der dualen und der primalen Lösung wie folgt berechnet werden:

$$\eta = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^m \text{Tr}(\mathbf{Z} \mathbf{F}_i \mathbf{x}_i) + \text{Tr}(\mathbf{Z} \mathbf{F}_0) = \text{Tr}(\mathbf{Z} \mathbf{F}(\mathbf{x})). \quad (3.12)$$

Da stets $\mathbf{Z} \succeq 0$ und $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0$ gilt, ist der Term $\text{Tr}(\mathbf{Z} \mathbf{F}(\mathbf{x}))$ immer größer oder gleich null. Dies bedeutet, dass der Zielfunktionswert für jeden dual zulässigen Punkt kleiner oder gleich dem Zielfunktionswert für jeden primal zulässigen Punkt ist. Die Differenz η wird dabei als Dualitätslücke bezeichnet. Bei linearen Programmen ist die optimale Lösung erreicht, wenn diese Lücke verschwindet. Bei semidefiniten Programmen ist dies nur unter bestimmten Voraussetzungen der Fall. Sei

$$p^* = \inf\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succeq 0\}$$

die optimale Lösung des primalen und

$$d^* = \sup\{-\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) \mid \mathbf{Z} \succeq 0, \text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i, i = 1, \dots, m\}$$

⁴Wie dieses duale Problem zustande kommt wird im Anhang A.4 näher erläutert.

die Lösung des dualen Problems. Die Gleichung $p^* = d^*$ gilt nur, falls eine der folgenden Bedingungen (Slater-Bedingungen [13, 88]) erfüllt ist:

- Das primale Problem ist strikt zulässig, d.h. $\exists \mathbf{x} : \mathbf{F}(\mathbf{x}) \succ 0$.
- Das duale Problem ist strikt zulässig, d.h. $\exists \mathbf{Z} : \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T \succ 0$, $\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i$, $i = 1, \dots, m$.

Bei den meisten Innere-Punkte-Verfahren wird vorausgesetzt, dass die Slater-Bedingungen erfüllt sind, d. h. $p^* = d^*$. Vor dem Start der eigentlichen Optimierung soll daher jeweils ein strikt primal, strikt dual oder ein strikt primal und dual zulässiger Punkt gefunden werden. Dies kann oft genau so aufwendig wie das Finden des Optimums sein [95]. Deswegen sind auch Verfahren entwickelt worden, die die Initialisierung mit unzulässigen Punkten ermöglichen. Dazu gehören unter anderem die projektive Methode von Nesterov und Nemirovski [66] und die primal-duale Methode von Helmberg [37].

Bis jetzt haben wir die Innere-Punkte-Algorithmen in Abhängigkeit davon unterteilt, was sie für Zwischenlösungen (primal, dual und primal-dual zulässige) und Initialwerte (zu- oder unzulässige) nutzen. Die Verfahren unterscheiden sich im Weiteren darin, wie sie das restringierte Optimierungsproblem (3.10) bzw. (3.11) in eine Reihe von Problemen mit oder ohne lineare Nebenbedingungen transformieren. Am häufigsten werden sie in

- Pfadverfolgungsmethoden [67, 83],
- Potentialreduktionsverfahren [84, 88],
- Affine-Scaling-Verfahren [20, 53]

unterteilt [29].

Bei den Pfadverfolgungsmethoden [67, 83] werden die Begrenzungen in die Zielfunktion einbezogen. Zu diesem Zweck wird eine mit einem positiven Faktor μ gewichtete Barriere-Funktion verwendet. Sie stellt sicher, dass die Lösung im Inneren des zulässigen Gebiets bleibt. Dadurch entsteht eine Reihe von unrestringierten, mittels Newton-Verfahren lösbaren und von μ abhängigen Problemen. Der Faktor μ wird iterativ verkleinert, bis mit $\mu = 0$ die optimale Lösung des ursprünglichen Problems (3.10) erreicht wird. Für jedes μ lässt sich ein eindeutiges Minimum $\mathbf{x}_{\text{opt}}(\mu)$ bestimmen. Dadurch bekommt man eine durch μ parametrisierte Kurve (siehe Abb. 3.2), die durch das Innere des zulässigen Gebiets geht und gegen die optimale Lösung am Rand des Gebiets konvergiert. Sie wird auch

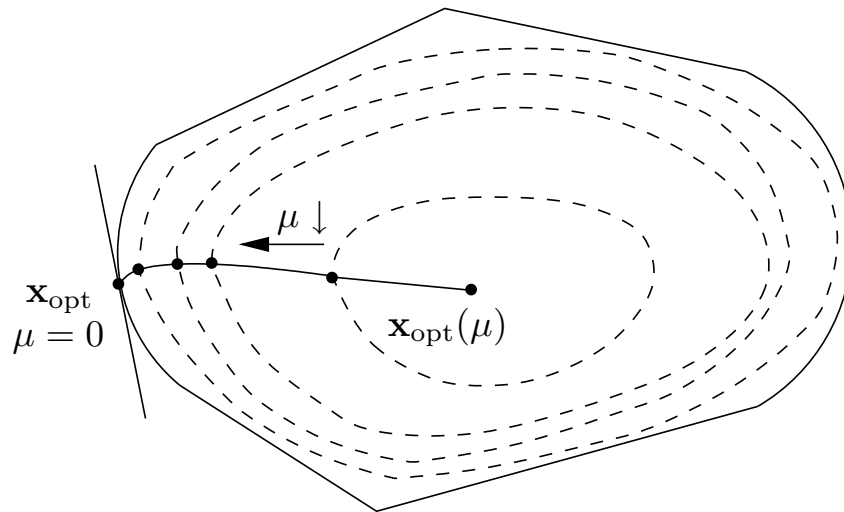


Abbildung 3.2: Zentraler Pfad. Dabei begrenzen die gestrichelten Höhenlinien den Bereich, in dem die Zielfunktion, erweitert um die mit μ gewichtete Barriere-Funktion, zulässig ist. Mit durchgezogener Linie ist die Menge zulässiger Parameter des ursprünglichen Problems (3.10) zu sehen. Nimmt der Gewichtungsfaktor μ ab, nähert man sich an die optimale Lösung des semidefiniten Programms (3.10) an.

als zentraler Pfad bezeichnet. Daraus folgt der Name Pfadverfolgungsmethoden. In Abhängigkeit davon, wie der Parameter μ für die nächste Iteration bestimmt wird, unterscheidet man zwischen Kurzschrift-, Langschritt- und Prädiktor-Korrektor-Verfahren [66].

Bei den Potentialreduktionsverfahren werden Ziel- und Barriere-Funktion so kombiniert, dass der Parameter μ entfällt. Dabei wird gefordert, dass die so gebildete Potentialfunktion in jedem Schritt mindestens mit einem vorgegebenen konstanten Wert abnimmt. Dadurch entsteht eine Reihe von mittels Newton-Verfahren lösbaren Problemen. Obwohl die meisten Potentialreduktionsverfahren theoretisch schlechter konvergieren als die Pfadverfolgungsmethoden, ist ihre Konvergenz in der Praxis sehr gut [66]. Die Potentialfunktion wurde zuerst von Karmarkar [48] in seinem Innere-Punkte-Verfahren für lineare Programmen eingeführt. Weitere Potentialfunktionen für semidefinite Programme sind in [84, 88] aufgeführt.

Bei den Affine-Scaling-Verfahren wird eine von Dikin [20] stammende Idee benutzt. Für einen strikt zulässigen Punkt \mathbf{x} wird eine lokale ellipsoide Approximation des zulässigen Gebiets mit Zentrum in \mathbf{x} konstruiert. Die Zielfunktion wird dann über diesem Ellipsoid minimiert, und

in die gefundene Suchrichtung wird ein Schritt mit geeigneter Schrittweite durchgeführt. Dadurch erhält man das Zentrum des Ellipsoids für die nächste Iteration [29]. Ein primales Affine-Scaling-Verfahren kann bei semidefiniten Programmen im Unterschied zum linearen Fall unter Umständen gegen eine nicht optimale Lösung konvergieren. Einige primal-duale Verfahren lassen sich allerdings auf semidefinite Programme erweitern [53].

LMI-Probleme können auch als nicht glatte, konvexe Eigenwertoptimierungsprobleme dargestellt werden, die in der nichtlinearen Optimierung durch so genannte Bündelmethoden (engl. bundle methods) gelöst werden. Diese Methoden haben sehr gute Konvergenzeigenschaften und sind für Probleme mit großen Dimensionen besser geeignet als die Innere-Punkte-Verfahren [36].

Die meisten Algorithmen zur Lösung von semidefiniten Programmen sind in verschiedenen Solvern⁵ realisiert. Die Vielfalt führt dazu, dass mehrere Darstellungsarten für semidefinite Programme existieren. Ein Wechsel zwischen den Solvern ist daher oft problematisch. Eine benutzerfreundliche Lösung des Problems bietet YALMIP [62] an. Dabei handelt es sich um eine Schnittstelle zwischen Matlab und den am meisten verbreiteten Solvern. Das LMI-Problem und der Solver werden vom Benutzer in Matlab definiert und YALMIP übernimmt die Übertragung in die entsprechende Darstellung. Bei den in Kap. 6 vorgestellten Ergebnissen wurde YALMIP in Kombination mit dem Solver SDPT3 [85] benutzt. Zur Lösung der Probleme wird eine primal-duale Pfadverfolgungsmethode verwendet, wobei sich die Schrittweite mittels eines Prädiktor-Korrektor-Verfahrens bestimmen lässt. Als Initialwerte sind auch unzulässige Punkte zugelassen. Der Solver liefert sehr gute Ergebnisse für Probleme mit niedriger und mittlerer Dimension [65].

⁵Ein unabhängiger Vergleich von Solvern findet sich in [65].

4 LMI-Entwurf weicher strukturvariabler Regelungen

Weiche strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen sind nichtlineare Zustandsrückführungen, die sich in Abhängigkeit eines vom Systemzustand abhängigen, implizit vorgegebenen Parameters ändern. Die Systemgleichung (2.1) bekommt dann die Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(v))\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

$$g(v, \mathbf{x}) = 0, \quad (4.2)$$

wobei die nichtlineare Zustandsrückführung mit $\mathbf{k}(v)$ bezeichnet wird. Der zustandsabhängige implizite Parameter v ist durch Gleichung (4.2) vorgegeben. Das Funktionsprinzip dieser Art von Regelungen ist in Abschnitt 2.3.3 erläutert worden. In diesem Kapitel wird näher auf den Entwurf solcher Zustandsrückführungen eingegangen. Dabei steht das bisherige Entwurfsverfahren nach [4] und dessen Vereinfachung im Vordergrund.

4.1 Bisheriges Entwurfsverfahren

Der Entwurf einer weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktion beruht auf dem von Adamy bewiesenen Satz [1]:

Satz 4.1 *Sei \mathbf{f} eine kontinuierliche Funktion. Die Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitze für jeden Anfangswert aus einer Umgebung \mathcal{U}_1 des Ursprungs eine eindeutige Lösung. In einem Gebiet*

$$\mathcal{H} = \{(v, \mathbf{x}) \mid 0 < v < \bar{v}, \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}\},$$

wobei $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}_1$ eine Umgebung des Ursprungs sei, existiere eine stetige Funktion $g(v, \mathbf{x})$, so dass gilt:

(B1) für $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ resultiert der Grenzwert $v \rightarrow 0+$ aus $g(v, \mathbf{v}) = 0$,

(B2) $\lim_{v \rightarrow 0+} g(v, \mathbf{x}) > 0$ und $\lim_{v \rightarrow \bar{v}-} g(v, \mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{0\}$.

Sind weiterhin innerhalb des Gebiets \mathcal{H} folgende Bedingungen

(B3) $-\infty < \underline{D}_v g(v, \mathbf{x})$ und $\bar{D}_v g(v, \mathbf{x}) < 0$,

(B4) $\bar{D}_t g(v, \mathbf{x}) < 0 \quad \forall (v, \mathbf{x})$ mit $g(v, \mathbf{x}) = 0$

erfüllt¹, so ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil. Des Weiteren ist durch die Gleichung $g(v, \mathbf{x}) = 0$ in $\mathcal{U}_0 \setminus \{0\}$ eine implizite Funktion v mit $0 < v(\mathbf{x}) < \bar{v}$ definiert, die in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ durch $v(\mathbf{0}) = 0$ stetig erweiterbar ist. Diese erweiterte Funktion ist eine Ljapunov-Funktion für das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ in \mathcal{U}_0 .

In dem in der Systemtheorie häufig verwendeten Stabilitätssatz von Ljapunov (siehe Anhang A.1) stellt die Existenz einer streng monoton fallenden, in einem Gebiet explizit definierten Ljapunov-Funktion sicher, dass die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ innerhalb dieses Gebiets asymptotisch stabil ist. Der Satz 4.1 von Adamy kann als der entsprechende Satz zum Stabilitätssatz auf Basis von implizit definierten Ljapunov-Funktionen betrachtet werden. Er ist grundlegend für den Entwurf weicher strukturvariabler Regelungen mit impliziten Ljapunov-Funktionen. Er gibt allgemeine Bedingungen vor, die erfüllt werden müssen, damit die Stabilität eines beliebigen nichtlinearen Systems sichergestellt ist. Ähnlich wie beim Satz von Ljapunov fehlen aber auch im Satz 4.1 jegliche Angaben zur Konstruktion der Funktion $g(v, \mathbf{x})$. Während deren Wahl bei nichtlinearen Systemen von dem konkreten Problem abhängt, ist es bei linearen Systemen möglich, allgemeine Entwurfsvorschriften anzugeben [4].

Ein Anhaltspunkt bei der Wahl von $g(v, \mathbf{x})$ ist die Tatsache, dass dadurch abgeschlossene Einzugsgebiete definiert werden [4]. Gesucht wird also eine Klasse von Funktionen, die eine möglichst große Vielfalt abgeschlossener Gebietsformen beschreiben. Dafür bieten sich Vektornormen [4, 68, 77] an, wodurch sich viele Formen wie z. B. Spate, Polyeder, Ellipsen darstellen lassen. Obwohl die Verwendung von polyederförmigen Gebieten unter Umständen eine Verbesserung der Regelgüte ermöglicht, lässt sich der Entwurf mit ellipsoidalen Gebieten deutlich einfacher gestalten [4, 68]. Aus diesem Grund werden in der vorliegenden Arbeit nur

¹Mit $\underline{D}_v g(v, \mathbf{x})$ bzw. $\bar{D}_v g(v, \mathbf{x})$ werden die untere bzw. obere partielle Dini-Derivierte der Funktion $g(v, \mathbf{x})$ nach v bezeichnet. Dadurch werden beim Stabilitätssatz auch nicht stetig differenzierbare Funktionen $g(v, \mathbf{x})$ zugelassen. Dies ist z. B. der Fall, wenn $g(v, \mathbf{x})$ polyederförmige Gebiete beschreibt.

ellipsoidenförmige Gebiete betrachtet. Sie lassen sich durch die kontinuierliche Funktion

$$e(v) = \frac{\mathbf{k}^T(v) \mathbf{R}^{-1}(v) \mathbf{k}(v)}{u_{\max}^2} < 1 \quad (4.3)$$

so skalieren, dass sie die Hyperebenen $|\mathbf{k}(v)\mathbf{x}| = u_{\max}$ tangieren. Damit ist sichergestellt, dass bestimmte Zustände am Rand eines Gebiets die Stellgröße $|\mathbf{k}(v)\mathbf{x}| \leq u_{\max}$ vollständig ausnutzen. Die skalierten Gebiete lassen sich dann folgendermaßen beschreiben:

$$\mathcal{G}(v) = \{\mathbf{x} \mid g(v, \mathbf{x}) = e(v)\mathbf{x}^T \mathbf{R}(v)\mathbf{x} - 1 < 0\}. \quad (4.4)$$

Die implizite Ljapunov-Funktion v ist daher durch die Gleichung $g(v, \mathbf{x}) = 0$ festgelegt.

Ferner ist die Rückführung $\mathbf{k}(v)$ zu bestimmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann festgelegt werden, dass die Strecke in Regelungsnormalform vorliegt und der Parameter v für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$ nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt, d. h. $\bar{v} = 1$. Ein steuerbares System kann immer in diese Form überführt werden, die im Weiteren vorausgesetzt wird. Die Rückführung $\mathbf{k}(v)$ soll nun so gewählt werden, dass die Regelung mit Annäherung des Zustandsvektors \mathbf{x} der Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ schneller wird. Dies kann erreicht werden, indem die Eigenwerte $\lambda_i(v)$ von $\hat{\mathbf{A}}(v) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(v)$ mit abnehmendem v auf Strahlen gemäß $\lambda_i(v) = \lambda_{1i}/v$, von den Anfangseigenwerten $\lambda_{1i} = \lambda_i(1)$ aus, immer weiter nach links in die komplexe Ebene verschoben werden. Der Sachverhalt ist in Abb. 4.1 grafisch dargestellt und wird durch die Rückführung

$$\mathbf{k}(v) = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 v^{-n} - a_0 \\ \hat{a}_1 v^{-(n-1)} - a_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} v^{-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{D}^{-1}(v) \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a} \quad (4.5)$$

realisiert. Dabei werden mit \hat{a}_i die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des geregelten Systems für $v = 1$ und mit a_i des ungeregelten Systems bezeichnet. Häufig fasst man sie in den Vektoren $\hat{\mathbf{a}}^T = [\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_n]$ und $\mathbf{a}^T = [a_0, \dots, a_i, \dots, a_n]$ zusammen. Die Matrix $\mathbf{D}(v)$ ist gemäß

$$\mathbf{D}(v) = \text{diag}(v^n, \dots, v^2, v) \quad (4.6)$$

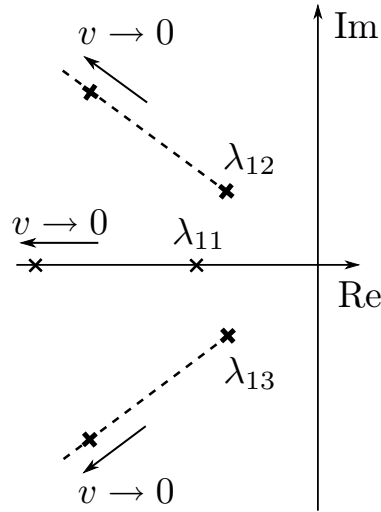


Abbildung 4.1: Beschleunigen der Regelung durch Verschiebung der Eigenwerte des geregelten Systems mit abnehmendem v nach links in die komplexe Ebene. Dabei wird mit λ_{1i} die i -te Eigenwert für $v = 1$ bezeichnet, d. h. $\lambda_{1i} = \lambda_i(1)$.

definiert. Da das ungeregelte System in Regelungsnormalform vorliegt, lässt sich die variable Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}(v)$ in folgender Form darstellen:

$$\hat{\mathbf{A}}(v) = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(v) = \frac{1}{v}\mathbf{D}(v)\hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{D}^{-1}(v), \quad \hat{\mathbf{A}}_1 = \hat{\mathbf{A}}(1). \quad (4.7)$$

Nachdem die Funktion $g(v, \mathbf{x})$ und die Rückführung $\mathbf{k}(v)$ festgelegt sind, soll im Weiteren mit Hilfe des Satzes (4.1) die Stabilität des so entstandenen geschlossenen Systems sichergestellt werden. Bei ellipsoidenförmigen Gebieten ist die Funktion $g(v, \mathbf{x})$ stetig differenzierbar, daher lassen sich die Dini-Derivierten durch partielle Ableitungen ersetzen.

Die Bedingung (B4) bedeutet anschaulich, dass die Gebiete $\mathcal{G}(v)$ invariant sind, d. h. alle am Rand $\partial\mathcal{G}(v) = \{\mathbf{x} \mid g(v, \mathbf{x}) = 0\}$ startenden Trajektorien treten in das Gebiet $\mathcal{G}(v)$ ein und können es im weiteren Verlauf nicht verlassen. Diese Eigenschaft ist sichergestellt, wenn die partielle Ableitung

$$\frac{\partial g(v, \mathbf{x})}{\partial t} = e(v)\mathbf{x}^T[\hat{\mathbf{A}}^T(v)\mathbf{R}(v) + \mathbf{R}(v)\hat{\mathbf{A}}(v)]\mathbf{x}$$

negativ ist, für alle $(v, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$, die die Gleichung $g(v, \mathbf{x}) = 0$ erfüllen. Dies ist offensichtlich der Fall, wenn für alle $(v, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}$ die Ungleichung

$$e(v)\mathbf{x}^T[\hat{\mathbf{A}}^T(v)\mathbf{R}(v) + \mathbf{R}(v)\hat{\mathbf{A}}(v)]\mathbf{x} < 0$$

gilt. Die Matrix $\hat{\mathbf{A}}(v)$ wird nun entsprechend Gl. (4.7) dargestellt. Da der Skalierungsfaktor $e(v)$ immer positiv ist, ist die obige Ungleichung äquivalent zur Bedingung

$$\mathbf{D}^{-1}(v)\hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{D}(v)\mathbf{R}(v) + \mathbf{R}(v)\mathbf{D}(v)\hat{\mathbf{A}}_1\mathbf{D}^{-1}(v) \prec 0.$$

Die Abhängigkeit von v lässt sich durch die Wahl

$$\mathbf{R}(v) = \mathbf{D}^{-1}(v)\mathbf{R}_1\mathbf{D}^{-1}(v), \quad \mathbf{R}_1 \succ 0 \quad (4.8)$$

eliminieren. Dadurch bekommt die Bedingung (B4), im Weiteren Invarianzbedingung genannt, ihre endgültige Gestalt

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec 0. \quad (4.9)$$

Die Bedingung (B3) stellt die Schachtelung der Gebiete sicher, d. h. $\mathcal{G}(v - \epsilon) \subset \mathcal{G}(v)$ für alle $v \in (0, 1]$ und $\epsilon \in (0, v)$. Daher wird sie im Weiteren als Schachtelungsbedingung bezeichnet. Die Funktion $g(v, \mathbf{x})$ wird wie folgt nach v differenziert:

$$\frac{\partial g(v, \mathbf{x})}{\partial v} = \frac{\partial e(v)}{\partial v} \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{R}(v) \mathbf{x} + e(v) \cdot \mathbf{x}^T \frac{\partial \mathbf{R}(v)}{\partial v} \mathbf{x} < 0. \quad (4.10)$$

Aufgrund $e(v) > 0$ und $\mathbf{R}_1 \succ 0$ ist das Einhalten der Bedingungen

$$e'(v) = \frac{\partial e(v)}{\partial v} \leq 0 \quad \forall v \in (0, \bar{v}) \text{ und} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}(v)}{\partial v} = \frac{1}{v} \mathbf{D}^{-1}(v)(\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N})\mathbf{D}^{-1}(v) \prec 0. \quad (4.12)$$

hinreichend dafür, dass die Ableitung (4.10) negativ ist. Dabei ist $\mathbf{N} = \text{diag}(-n, \dots, -2, -1)$, wobei mit n die Systemordnung bezeichnet wird. Die Definitheit des Ausdrucks (4.12) wird durch die Matrix $\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N}$ bestimmt, so dass letztendlich folgende Bedingungen gewährleistet werden müssen:

$$\max_{v \in (0, 1]} e'(v) \leq 0 \text{ und} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{N}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{N} \prec 0. \quad (4.14)$$

Diese in Kombination mit der Ungleichung (4.9) stellen sicher, dass die Funktion $g(v, \mathbf{x})$ alle Bedingungen des Satzes (4.1) erfüllt. Damit ist das geregelte System asymptotisch stabil in der Umgebung \mathcal{U}_0 . Es bleibt

noch sicherzustellen, dass die Menge der möglichen Anfangszustände \mathcal{X}_0 eine Untermenge von \mathcal{U}_0 ist. Dies ist der Fall, wenn

$$\mathcal{G}(1) = \{e(1)\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 < 0\} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad (4.15)$$

gilt. Anschaulich bedeutet dies, dass das Gebiet \mathcal{X}_0 innerhalb der größten Ellipse $\mathcal{G}(1)$ liegt, d. h. $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{G}(1)$. Wenn die Menge \mathcal{X}_0 konvex ist, kann die Überprüfung dieser Bedingung auf die Überprüfung der Eckpunkte von \mathcal{X}_0 zurückgeführt werden.

Beim Entwurf sind nun die unbekannten Parameter \mathbf{R}_1 und $\hat{\mathbf{a}}$ festzulegen. Als Gütefunktion wird in [4] das Volumen des Anfangsgebiets $\mathcal{G}(1)$ maximiert². Dabei wird der Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ vorgegeben und nur die Matrix \mathbf{R}_1 gesucht. Sie ergibt sich als Lösung des folgenden restringierten Optimierungsproblems:

$$\max_{\mathbf{R}_1} \frac{1}{e^n(1)\det\mathbf{R}_1} \quad (4.16)$$

u. d. N. (4.17) bis (4.21).

Dieses Optimierungsproblem kann z. B. mittels einer Evolutionsstrategie [72] gelöst werden, was unter Umständen sehr rechenintensiv ist. Daraus ergibt sich die folgende Problemstellung.

4.2 Problemstellung

Der Entwurf einer weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen lässt sich, wie gerade in Abschnitt 4.1 gezeigt, zu einem nichtlinearen restringierten Optimierungsproblem reduzieren, welches mit verschiedenen Suchverfahren, wie z. B. Evolutionsstrategien, gelöst werden kann. Allerdings sind solche Verfahren häufig mit langen Rechenzeiten und starker Abhängigkeit von der Wahl guter Initialwerte verbunden. Außerdem lässt sich nicht sicherstellen, dass das gefundene Optimum global ist.

²Auf weitere Kriterien wird in Abschnitt 4.5 eingegangen.

Fasst man die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Nebenbedingungen

$$\mathbf{R}_1 \succ 0, \quad (4.17)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec 0, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{N} \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{N} \prec 0, \quad (4.19)$$

$$\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0, \quad (4.20)$$

$$\mathcal{G}(1) = \{e(1)\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 < 0\} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad (4.21)$$

zusammen, ist schnell zu erkennen, dass sich die ersten drei sehr einfach als LMIs bezüglich der Variablen \mathbf{R}_1^{-1} und $\mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}}$ formulieren lassen (siehe Abschnitt 3.2). Dies deutet auf eine konvexe zulässige Menge hin. Es soll nun der Frage nachgegangen werden, ob sich auch die restlichen zwei Bedingungen als LMIs in diesen Variablen darstellen lassen. Dies würde die Überführung des Entwurfs in ein konvexes Optimierungsproblem ermöglichen. Das Problem wäre dann mit Innere-Punkte-Verfahren lösbar, die theoretisch in polynomialer Zeit das globale Optimum finden und bei den meisten praktischen Problemen deutlich schneller sind [12, 66]. Da dann ein konvexes Problem vorläge, gäbe es auch nur ein einziges Optimum.

Die Aufgabe in den nächsten Abschnitten ist daher, die Bedingungen (4.20) und (4.21) als LMIs darzustellen.

4.3 Vereinfachung der Monotoniebedingung

Die Bedingung (4.20) stellt sicher, dass die Funktion $e(v)$ monoton fällt, daher wird sie auch als Monotoniebedingung bezeichnet. Die Hauptschwierigkeit bei ihrer Überprüfung besteht darin, dass sie für ein ganzes Wertekontinuum $v \in (0, 1]$ garantiert werden muss [68]. Adamy [4] ermittelt dafür die Extrema der Funktion $e'(v)$ und überprüft die Bedingung (4.20) für die Extrempunkte. Bei diesem Vorgehen kann man aber die Bedingung erst dann überprüfen, wenn die Parameter \mathbf{R}_1 und $\hat{\mathbf{a}}$ bekannt sind. Daher ist nur ein Reglerentwurf mittels Suchverfahren möglich.

Eine deutliche Vereinfachung des Problems wäre durch Eliminieren der Abhängigkeit von v möglich. Das Polynom $e'(v)$ wird zu diesem Zweck in der Form

$$e'(v) = \frac{1}{u_{\max}^2} [\mathbf{a}^T \mathbf{D}'(v) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{D}(v) \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{D}(v) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{D}'(v) \mathbf{a} - 2 \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{D}'(v) \mathbf{a}]. \quad (4.22)$$

dargestellt, die sich nach Einsetzen von Gl. (4.5) und Gl. (4.8) in Gl. (4.3) und Ableiten nach v ergibt. Da $\mathbf{D}(v)$ eine Diagonalmatrix ist und $\mathbf{D}'(v) = -\frac{1}{v}\mathbf{ND}(v)$, lässt sich Gl. (4.22) weiter zu

$$e'(v) = \frac{-2}{u_{\max}^2 v} [\mathbf{a}^T \mathbf{D}(v) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{ND}(v) \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{ND}(v) \mathbf{a}] \quad (4.23)$$

vereinfachen. Nun werden eine oder mehrere von v unabhängige Bedingungen gesucht, die sicherstellen, dass das Polynom $e'(v)$ im Intervall $(0, 1]$ kleiner gleich null bleibt³. Dafür werden im Weiteren zwei mögliche Lösungen vorgestellt.

4.3.1 Anwendung der Regel von Newton

Bei dem ersten Lösungsansatz wird die folgende Regel von Newton [70] verwendet:

Lemma 4.1 (Newton-Regel) *Gegeben ist ein reelles Polynom m -ter Ordnung*

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 \quad (4.24)$$

mit $m > 0$ und eine reelle Zahl L . Wenn an der Stelle L das Polynom und seine sämtlichen Ableitungen $p^{(i)}(L) \geq 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, m\}$ sind, dann ist $p(x) > 0, \forall x > L$, d. h., L ist eine obere Schranke für die reellen Nullstellen der Gleichung $p(x) = 0$.

Beweis: Wir setzen $x = L + \epsilon, \epsilon \geq 0$ und entwickeln das Polynom an der Stelle L nach der Taylorschen Formel

$$p(x) = p(L) + \epsilon p'(L) + \frac{\epsilon^2}{2} p''(L) + \dots + \frac{\epsilon^n}{n} p^{(n)}(L). \quad (4.25)$$

Es gilt $p^{(i)}(L) \geq 0$ für $\forall i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Die m -te Ableitung $p^{(m)}(L) = m! \cdot a_m$ eines Polynoms m -ter Ordnung ist immer verschieden von Null. Daher ist $p(x) > 0, \forall x > L$. \square

Die Regel von Newton ist nicht direkt auf unser Problem anwendbar, da in Gl. (4.20) das Intervall $(0, 1]$ betrachtet wird. Um Newtons Regel dennoch anwenden zu können, wird Gl. (4.23) sowie das Intervall $(0, 1]$ mittels der Vorschrift

$$v = \frac{1}{\tilde{v}} \quad (4.26)$$

³Dabei wird vorausgesetzt, dass $e'(v)$ kein Nullpolynom ist. Wenn dies der Fall ist, ist Bedingung (4.20) immer erfüllt, und man kann auf deren Überprüfung verzichten.

transformiert. Die transformierte Funktion

$$e'(v) = e' \left(\frac{1}{\tilde{v}} \right) = - \frac{2}{u_{\max}^2 \tilde{v}^{2n-1}} p(\tilde{v}), \quad (4.27)$$

wobei

$$p(\tilde{v}) = \mathbf{a}^T \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{a} - \tilde{v}^n \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{a}, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{T}(\tilde{v}) = \tilde{v}^n \mathbf{D} \left(\frac{1}{\tilde{v}} \right) = \text{diag}(1, \tilde{v}, \dots, \tilde{v}^{n-1}) \quad (4.29)$$

gilt, wird jetzt im Intervall $[1, \infty)$ betrachtet. Die ursprüngliche Forderung $e'(v) \leq 0, \forall v \in (0, 1]$ ist also äquivalent zur Forderung $p(\tilde{v}) \geq 0, \forall \tilde{v} \in [1, \infty)$, da der Vorfaktor

$$- \frac{2}{u_{\max}^2 \tilde{v}^{2n-1}}$$

im Intervall $[1, \infty)$ negativ ist. Die Forderung nach der Transformation hat jedoch den Vorteil, dass Lemma 4.1 angewendet werden kann, um $p(\tilde{v}) \geq 0, \forall \tilde{v} \in [1, \infty)$ sicherzustellen. Zu diesem Zweck werden die m Ableitungen des Polynoms $p(\tilde{v})$ berechnet.

Lemma 4.2 *Die i -te Ableitung des Polynoms $p(\tilde{v})$ lässt sich nach der Formel*

$$p^{(i)}(\tilde{v}) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}^T \mathbf{T}^{(i-k)}(\tilde{v}) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{T}^{(k)}(\tilde{v}) \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} (\tilde{v}^n \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(i)} \mathbf{a}, \quad (4.30)$$

$$(\tilde{v}^n \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(i)} = \tilde{v}^{n-i} \mathbf{T}(\tilde{v}) \prod_{q=0}^{i-1} [(n-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}],$$

$$\mathbf{T}^{(i)}(\tilde{v}) = \tilde{v}^{-i} \mathbf{T}(\tilde{v}) \prod_{q=0}^{i-1} [-q\mathbf{I} + \mathbf{M}]$$

berechnen, wobei $\mathbf{M} = \text{diag}(0, 1, \dots, n-1)$ ist.

Beweis: Das Polynom wird in zwei Polynome $p_1(\tilde{v})$ und $p_2(\tilde{v})$ aufgeteilt:

$$p(\tilde{v}) = \underbrace{\mathbf{a}^T \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{a}}_{p_1(\tilde{v})} - \underbrace{\tilde{v}^n \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{a}}_{p_2(\tilde{v})}. \quad (4.31)$$

Zur Berechnung der i -ten Ableitung von $p_1(\tilde{v})$ teilt man $p_1(\tilde{v}) = \mathbf{f}^T(\tilde{v})\mathbf{g}(\tilde{v})$ in $\mathbf{f}^T(\tilde{v}) = \mathbf{a}^T\mathbf{T}(\tilde{v})\mathbf{R}_1^{-1}$ und $\mathbf{g}(\tilde{v}) = \mathbf{N}\mathbf{T}(\tilde{v})\mathbf{a}$ auf und nutzt die Leibnizsche Regel [14]

$$(\mathbf{f}^T(\tilde{v})\mathbf{g}(\tilde{v}))^{(i)} = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (\mathbf{f}^T(\tilde{v}))^{(i-k)} (\mathbf{g}(\tilde{v}))^{(k)}. \quad (4.32)$$

Für die i -te Ableitung von $p_1(\tilde{v})$ erhält man also

$$p_1^{(i)}(\tilde{v}) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}^T \mathbf{T}^{(i-k)}(\tilde{v}) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{T}^{(k)}(\tilde{v}) \mathbf{a}, \quad (4.33)$$

$$\text{wobei } \mathbf{T}^{(0)}(\tilde{v}) = \mathbf{T}(\tilde{v}). \quad (4.34)$$

Im Weiteren sind nun die Ableitung $\mathbf{T}^{(i)}(\tilde{v})$ und die Ableitung von $p_2(\tilde{v}) \sim (\tilde{v}^n \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(i)}$ zu berechnen. Für $l = 0$ bzw. $l = n$ stimmen diese mit der Ableitung des Ausdrucks $(\tilde{v}^l \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(i)}$, $l \in \mathbb{N}$ überein, die nun mittels vollständiger Induktion zu bestimmen ist. Wir nehmen an, dass sich die i -te Ableitung gemäß

$$(\tilde{v}^l \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(i)} = \tilde{v}^{(l-i)} \mathbf{T}(\tilde{v}) \prod_{q=0}^{i-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}], \quad (4.35)$$

mit $\mathbf{M} = \text{diag}(0, 1, \dots, n-1)$ und $(\tilde{v}^l \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(0)} = \tilde{v}^l \mathbf{T}(\tilde{v})$

berechnen lässt. Die Formel gilt für $i = 0$ und $i = 1$. Es ist also zu beweisen, dass aus Gl. (4.35)

$$(\tilde{v}^l \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(i+1)} = \tilde{v}^{(l-i-1)} \mathbf{T}(\tilde{v}) \prod_{q=0}^i [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] \quad (4.36)$$

folgt. Dazu wird Gl. (4.35) ein weiteres Mal abgeleitet:

$$\begin{aligned} (\tilde{v}^l \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(i+1)} &= \\ &= (l-i) \tilde{v}^{(l-i-1)} \mathbf{T}(\tilde{v}) \prod_{q=0}^{i-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] + \tilde{v}^{(l-i-1)} \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{M} \prod_{q=0}^{i-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] \\ &= \tilde{v}^{(l-i-1)} \mathbf{T}(\tilde{v}) ((l-i)\mathbf{I} + \mathbf{M}) \prod_{q=0}^{i-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] \end{aligned}$$

Daraus folgt $(\tilde{v}^l \mathbf{T}(\tilde{v}))^{(i+1)} = \tilde{v}^{(l-i-1)} \mathbf{T}(\tilde{v}) \prod_{q=0}^i [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}]$. \square

Zur Abkürzung wird

$$\mathbf{P}(l, k) = \begin{cases} \prod_{q=0}^{k-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] & \text{für } k \neq 0 \\ \mathbf{I} & \text{für } k = 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

eingeführt. Damit ergibt sich:

Satz 4.2 Sei $m \leq 2n - 1$ die Ordnung des Polynoms $p(\tilde{v})$. Wenn $\forall i \in \{0, 1, \dots, m\}$

$$\begin{aligned} p^{(i)}(1) &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}^T \mathbf{P}(0, i-k) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}(0, k) \mathbf{a} \\ &\quad - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}(n, i) \mathbf{a} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

gilt, dann ist die Ungleichung $\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0$ erfüllt.

Beweis: Die Ungleichungen (4.38) stellen sicher, dass das Polynom $p(\tilde{v})$ und seine sämtlichen Ableitungen für $\tilde{v} > 1$ positiv sind, d. h.

$$\begin{aligned} p(\tilde{v}) &> 0, \forall \tilde{v} > 1, \\ \Rightarrow e'(v) &= -\frac{2v^{2n-1}}{u_{\max}^2} p\left(\frac{1}{v}\right) < 0, \forall v \in (0, 1). \end{aligned}$$

Für $\tilde{v} = 1$ ist $p(\tilde{v}) \geq 0$ und damit $e'(v) \leq 0$. \square

Die Ungleichungen (4.38) im Satz 4.2 sind von v unabhängig. Das Ziel, in der Bedingung (4.20) die Abhängigkeit von v zu eliminieren, ist damit erreicht. An ihre Stelle treten m lineare Ungleichungen, welche sich als LMIs in den unbekannten Variablen darstellen lassen.

Die Bedingungen (4.38) sind hinreichend für die Erfüllung der Ungleichung (4.20). Im Weiteren wird der Frage nachgegangen, inwieweit sie notwendig sind bzw. wie konservativ die Abschätzung mittels der Regel von Newton ist.

Bei genauerer Betrachtung fällt schnell auf, dass die Forderungen in Lemma 4.1 für alle Polynome mit negativem Leitkoeffizient ($a_m < 0$) nicht erfüllt werden können, da die Ableitung $p^{(m)}(L) = m! \cdot a_m$ immer negativ ist. Dies ist in unserem Fall allerdings keine Begrenzung der Allgemeinheit, da das folgende Lemma gilt:

Lemma 4.3 *Sei $e'(v)$ kein Nullpolynom. Ist $\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0$, dann ist der Leitkoeffizient des Polynoms $p(\tilde{v})$ positiv.*

Beweis: Wegen der Transformation (4.26) ist

$$\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{u_{\max}^2 \tilde{v}^{2n-1}} p(\tilde{v}) \leq 0, \forall \tilde{v} \in [1, \infty).$$

Daher gilt $p(\tilde{v}) \geq 0, \forall \tilde{v} \in [1, \infty)$. Ein Polynom ist für $\tilde{v} \rightarrow \infty$ nur dann positiv, wenn der Leitkoeffizient $a_m > 0$ positiv ist. Der Leitkoeffizient von $p(\tilde{v})$ ist also positiv. \square

Ist der Leitkoeffizient eines reellen Polynoms positiv, lässt sich Folgendes zeigen:

Lemma 4.4 *Gegeben ist ein reelles Polynom m -ter Ordnung*

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 \quad (4.39)$$

mit $m > 0$ und $a_m > 0$. Für alle m Wurzeln des Polynoms gelte $\Re(x_i) \leq L$. Die reelle Zahl L ist genau dann eine obere Schranke für die reellen Nullstellen $\alpha_j, \forall j \in \{1, \dots, s\}$ mit $s \leq m$ der Gleichung $p(x) = 0$, wenn das Polynom und seine sämtlichen Ableitungen $p^{(i)}(L) \geq 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, m\}$ sind.

Beweis: Lemma 4.1 stellt die Konklusion

$$p^{(i)}(L) \geq 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, m\} \Rightarrow \alpha_j \leq L$$

sicher. Zu zeigen ist nun, dass unter der Bedingung $\Re(x_i) \leq L$ auch die Umkehrung

$$\alpha_j \leq L \Rightarrow p^{(i)}(L) \geq 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, m\}$$

gilt. Zu diesem Zweck wird das Polynom normiert und in reelle Faktoren zerlegt:

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} \dots (x - \alpha_s)^{m_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{l_r}.$$

Diese Zerlegung ist immer möglich, da es sich um ein reelles Polynom handelt. Außer s reellen Wurzeln α_j hat Gleichung $p(x) = 0$ insgesamt r konjugiert komplexe Wurzelpaare. Sie ergeben sich als Lösung der quadratischen Gleichungen $x^2 + p_k x + q_k = 0$ mit den Diskriminanten $(p_k/2)^2 - q_k < 0$. Die Zahlen $m_j, l_k \in \mathbb{N}_0$ stehen für die Vielfachheit

der entsprechenden Nullstelle. Man bezeichnet nun die einzelnen Faktoren mit f_i , $i = 1, \dots, r + s$ und berechnet die Ableitung des Polynoms $p(x)$. Nach der Produktregel folgt

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{r+s} f_1 f_2 \dots f_i' \dots f_{r+s}. \quad (4.40)$$

Da $\alpha_j \leq L$ gilt, sind alle Faktoren vom Typ $f_i = (x - \alpha_j)^{m_j}$ für $x \geq L$ immer größer oder gleich null. Die Faktoren $(x^2 + p_k x + q_k)^{l_k}$ sind positiv für jedes x , was auch den Fall $x = L$ einschließt. Damit ist das Vorzeichen der einzelnen Summanden von der Ableitung f_i' abhängig. Sei $f_i = (x - \alpha_j)^{m_j}$, dann ist $f_i'(L) = m_j(L - \alpha_j)^{m_j-1}$. Dieser Term ist nie negativ. Sei nun $f_i = (x^2 + p_k x + q_k)^{l_k}$, dann ist $f_i' = (2x + p_k)(x^2 + p_k x + q_k)^{l_k-1}$. Das Vorzeichen wird vom Ausdruck $2x + p_k$ bestimmt. Da für alle Wurzeln

$$\Re(x_i) \leq L$$

vorausgesetzt wird, sollen bei den komplexen die Ungleichungen $-\frac{p_i}{2} \leq L$ bzw. $2L + p_i \geq 0$ gelten. Für $x = L$ sind also alle Summanden in Gl. (4.40) positiv oder null. Daher folgt für die Ableitung $p_i'(x)$ an der Stelle L , $p_i'(L) \geq 0$.

Das Erfüllen der restlichen Ungleichungen $p^i(L) \geq 0$ für $i \in \{2, \dots, m\}$ lässt sich nach dem gleichen Prinzip zeigen. \square

In Lemma 4.4 wurden allgemeine Polynome mit einem positiven Leitkoeffizienten betrachtet. Bei dem Entwurf eines weichen strukturvariablen Reglers geht es jedoch um ein konkretes Polynom, das in Gl. (4.28) definiert wurde. Der folgende Satz gibt einen Bereich für die Wurzeln der Gleichung $e(v)' = 0$ an, für den die Abschätzung mittels der Regel von Newton nicht konservativ ist.

Satz 4.3 *Hat die Gleichung $e'(v) = 0$ keine komplexen Wurzeln $z = x + iy$ innerhalb des Kreises $(x-0,5)^2 + y^2 = (0,5)^2$, dann ist die Ungleichung $\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0$ genau dann erfüllt, wenn für das Polynom*

$$p(\tilde{v}) = -\frac{u_{\max}^2 \tilde{v}^{2n-1}}{2} e'(v) \text{ mit } v = \frac{1}{\tilde{v}}$$

der Ordnung $m \leq 2n - 1$ für alle $i = 0, 1, \dots, m$ gilt:

$$\begin{aligned} p^{(i)}(1) &= \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}^T \mathbf{P}(0, i-k) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}(0, k) \mathbf{a} \\ &\quad - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}(n, i) \mathbf{a} \geq 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Beweis: Nach Satz 4.2 folgt aus der Bedingung (4.41) die Ungleichung $\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0$. Es bleibt zu zeigen, dass für die Polynome $e'(v)$, die keine Wurzeln innerhalb des Kreises $(x - 0,5)^2 + y^2 = 0,5^2$ besitzen, auch die Umkehrung gilt. Nach Transformation von v , $v = \frac{1}{\tilde{v}}$, folgt

$$\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0 \Leftrightarrow e'(v) \leq 0, \forall v \in (0, 1] \Leftrightarrow p(\tilde{v}) \geq 0, \forall \tilde{v} \geq 1.$$

Nach Lemma 4.3 ist der Leitkoeffizient von $p(\tilde{v})$ immer positiv. Gilt dazu auch noch $\Re(\{\tilde{v} \mid p(\tilde{v}) = 0\}) \leq 1$, folgt nach Lemma 4.4

$$p(\tilde{v}) \geq 0, \forall \tilde{v} \geq 1 \Leftrightarrow p^{(i)}(1) \geq 0, \forall i = 0, \dots, m.$$

Dies ist z. B. der Fall, wenn die Gleichung $e'(v) = 0$ nur reelle Wurzeln hat. Allerdings hat $e'(v) = 0$ im Allgemeinen auch konjugiert komplexe Wurzelpaare. Nehmen wir ein beliebiges konjugiert komplexes Wurzelpaar $v_{k1,k2} = x \pm iy$, das sich als Lösung der Gleichung $v^2 + p_k v + q_k = 0$ ergibt. Das transformierte Polynom $\tilde{v}^2 + \tilde{p}_k \tilde{v} + \tilde{q}_k = 0$ hat dann auch zwei konjugiert komplexe Wurzeln $\tilde{v}_{k1,k2}$ mit Realteil $-\tilde{p}_k/2$. Der Realteil soll nun kleiner oder gleich 1 sein. Die Berechnung des Koeffizienten \tilde{p}_k in Abhängigkeit der komplexen Wurzeln des nicht transformierten Polynoms liefert folgendes Ergebnis:

$$\tilde{p}_k = -(\tilde{v}_{k1} + \tilde{v}_{k2}) = -\left(\frac{1}{x + iy} + \frac{1}{x - iy}\right) = -\frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

Die Ungleichung

$$-\frac{\tilde{p}_k}{2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + y^2} < 1$$

gilt stets, wenn x und y die Ungleichung $(x - 0,5)^2 + y^2 \geq 0,5^2$ erfüllen. Dies ist der Fall für alle komplexe Wurzeln, die außerhalb des Kreises $(x - 0,5)^2 + y^2 = 0,5^2$ liegen. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der Forderung $\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0$ die Bedingung (4.41). \square

Der Satz (4.3) zeigt, dass die Bedingung (4.41) konservativ ist, falls sich die Wurzeln von $e'(v)$ für die optimale \mathbf{R}_1 und $\hat{\mathbf{a}}$ innerhalb des Kreises $(x - 0,5)^2 + y^2 = 0,5^2$ befinden. Damit ist es möglich, dass eine der Ableitungen $p^{(i)}(1) < 0$ ist, obwohl 1 eine obere Schranke für die reellen Wurzeln des Polynoms $e'(v)$ ist.

Die Frage ist nun, ob es möglich ist, eine andere, weniger konservative Bedingung zu formulieren. Diese Frage soll im folgenden Abschnitt beantwortet werden.

4.3.2 Darstellung als parameterabhängige Matrix

Als Grundlage für die parameterunabhängige Formulierung von Bedingung (4.20) lässt sich ein Lemma benutzen, das bei parameterabhängigen Matrizen verwendet wird:

Lemma 4.5 ([97]) *Gegeben sei $\mathbf{J} := [\mathbf{0}_{l(k-1) \times l} \ \mathbf{I}_{l(k-1)}] \in \mathbb{R}^{l(k-1) \times lk}$ und $\mathbf{C} := [\mathbf{I}_{l(k-1)} \ \mathbf{0}_{l(k-1) \times l}] \in \mathbb{R}^{l(k-1) \times lk}$. Die Matrixungleichung*

$$\Theta(\rho) = (\rho^{[k]} \otimes \mathbf{I}_l)^T \Theta_\Sigma (\rho^{[k]} \otimes \mathbf{I}_l) \prec 0 \quad (4.42)$$

gilt für alle $\rho \in [-1, 1]$ genau dann, wenn Matrizen $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{l(k-1) \times l(k-1)}$ und $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{l(k-1) \times n(k-1)}$ existieren, so dass die Bedingungen

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{G} + \mathbf{G}^T = 0, \quad (4.43)$$

$$\Theta_\Sigma \prec \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{S} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

erfüllt sind.

Mit \otimes wird der Kroneker-Produkt bezeichnet. Dabei ist $\rho^{[k]} := [1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{k-1}]^T$ ein Vektor in \mathbb{R}^k , und $\Theta(\rho) = \Theta_0 + \rho\Theta_1 + \dots + \rho^m\Theta_m$ ist eine parameterabhängige Matrix mit konstanten symmetrischen Matrizen $\Theta_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $i = 0, \dots, m$ als Koeffizienten. Zwischen k und m existiert der Zusammenhang $k = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$, wobei $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ die kleinste natürliche Zahl bezeichnet, die größer oder gleich $\frac{m}{2}$ ist. Die Matrix Θ_Σ hängt von den Koeffizienten Θ_i und m ab und ist nicht genau festgelegt. Eine mögliche Wahl (siehe [97]) ist die Bandmatrix

$$\Theta_\Sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\Theta_0 & \Theta_1 & & & 0 \\ \Theta_1 & 2\Theta_2 & \Theta_3 & & \\ & \Theta_3 & 2\Theta_4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \Theta_{m-1} \\ 0 & & & \Theta_{m-1} & 2\Theta_m \end{bmatrix}, \text{ falls } m \text{ gerade, und}$$

$$\Theta_\Sigma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\Theta_0 & \Theta_1 & & & 0 \\ \Theta_1 & 2\Theta_2 & \Theta_3 & & \\ & \Theta_3 & 2\Theta_4 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \Theta_{m-2} \\ & & & \Theta_{m-2} & 2\Theta_{m-1} & \Theta_m \\ 0 & & & & \Theta_m & 0 \end{bmatrix}, \text{ für } m \text{ ungerade.}$$

Lemma 4.5 entspricht dem in [97] aufgeführten Lemma 4.12, wo auch der entsprechende Beweis erfolgt. Daher wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

Um das Lemma 4.5 auf unser Polynom $e'(v)$ anwenden zu können, ist das Intervall $(0, 1]$ in das Intervall $[-1, 1]$ zu transformieren. Im Weiteren wird allerdings der allgemeinere Fall betrachtet, bei dem das Intervall $[\epsilon, 1]$, $0 < \epsilon < 1$ in das Intervall $[-1, 1]$ transformiert wird. Damit wird beim Entwurf berücksichtigt, dass die Eigenwerte des geschlossenen Systems bei der Simulation nicht unendlich weit nach links verschoben werden können⁴.

Nun sind die Koeffizienten des transformierten Polynoms in Abhängigkeit von $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R} darzustellen. Wir betrachten das Polynom $e'(v)$ in der Form (4.23). Für $v \in (0, 1]$ sind die Nullstellen durch den Ausdruck

$$f(v) = \frac{1}{v}(\mathbf{a}^T \mathbf{D}(v) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{D}(v) \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{D}(v) \mathbf{a}). \quad (4.45)$$

bestimmt. Die Ungleichung $f(v) > 0, \forall v \in [\epsilon \rightarrow 0, 1]$ ist äquivalent zur Forderung $\max_{v \in (0, 1]} e'(v) < 0$. Die Transformation erfolgt nach der Vorschrift

$$v = \frac{(1 - \epsilon)\tilde{v}}{2} + \frac{1 + \epsilon}{2}. \quad (4.46)$$

Sei $f(v) = a_m v^m + a_{m-1} v^{m-1} + \dots + a_1 v + a_0$, dann erhält man für das transformierte Polynom

$$\tilde{f}(\tilde{v}) = a_m \left(\frac{(1 - \epsilon)\tilde{v}}{2} + \frac{1 + \epsilon}{2} \right)^m + \dots + a_1 \left(\frac{(1 - \epsilon)\tilde{v}}{2} + \frac{1 + \epsilon}{2} \right) + a_0.$$

Zu Beginn setzt man voraus, dass die Koeffizienten von $f(v)$ bekannt sind, und sucht die Abhängigkeit zwischen den Koeffizienten von $f(v)$ und $\tilde{f}(\tilde{v})$. Die Koeffizienten des transformierten Polynoms $\tilde{f}(\tilde{v})$ sind offensichtlich eine gewichtete Summe der Koeffizienten des Polynoms $f(v)$. Um die Gewichte zu bestimmen, stellen wir dies in der Form

$$\tilde{f}(\tilde{v}) = a_m \left(\frac{1 - \epsilon}{2} \right)^m \left(\tilde{v} + \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \right)^m + \dots + a_1 \left(\frac{1 - \epsilon}{2} \right) \left(\tilde{v} + \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \right) + a_0$$

dar. Zur Vereinfachung werden die Abkürzungen

$$q = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \quad \text{und} \quad \bar{a}_i = \left(\frac{1 - \epsilon}{2} \right)^i a_i, \quad i = 0, \dots, m \quad (4.47)$$

⁴Für $v \rightarrow 0$ treten numerische Probleme beim Lösen der impliziten Gleichung $g(v, \mathbf{x}) = 0$ auf. Außerdem wird das Rauschen unnötig verstärkt.

eingeführt.

Die Ausdrücke $(\tilde{v} + q)^i$, $i = 1, \dots, m$ werden nach dem binomischen Satz [14] entwickelt, und beispielsweise für $i = j$ erhält man

$$(\tilde{v} + q)^j = \binom{j}{0} \tilde{v}^j + \binom{j}{1} \tilde{v}^{j-1} q + \binom{j}{2} \tilde{v}^{j-2} q^2 + \dots + \binom{j}{j-1} \tilde{v} q^{j-1} + \binom{j}{j} q^j.$$

Werden nun diese Ausdrücke mit den Koeffizienten \bar{a}_i gewichtet

$$\bar{a}_0(\tilde{v} + q)^0 = \bar{a}_0 \cdot 1,$$

$$\bar{a}_1(\tilde{v} + q)^1 = \bar{a}_1(\tilde{v} + q),$$

$$\bar{a}_2(\tilde{v} + q)^2 = \bar{a}_2(\tilde{v}^2 + 2\tilde{v}q + q^2),$$

$$\bar{a}_3(\tilde{v} + q)^3 = \bar{a}_3(\tilde{v}^3 + 3\tilde{v}^2q + 3\tilde{v}q^2 + q^3),$$

\vdots

$$\bar{a}_m(\tilde{v} + q)^m =$$

$$= \bar{a}_m \left(\binom{m}{0} \tilde{v}^m + \binom{m}{1} \tilde{v}^{m-1} q + \dots + \binom{m}{m-1} \tilde{v} q^{m-1} + \binom{m}{m} q^m \right)$$

und die Summanden anschliessend in Abhängigkeit von \tilde{v} zusammengefasst, lassen sich die entsprechenden Koeffizienten wie folgt bestimmen:

$$\tilde{a}_0 = \sum_{i=0}^m \binom{i}{i} q^i \bar{a}_i, \quad \tilde{a}_1 = \sum_{i=1}^m \binom{i}{i-1} q^{i-1} \bar{a}_i, \dots, \quad \tilde{a}_m = \sum_{i=m}^m \binom{i}{i-m} q^{i-m} \bar{a}_i.$$

Ein beliebiger Koeffizient \tilde{a}_j mit $j = 0, \dots, m$ kann also nach der Vorschrift

$$\tilde{a}_j = \sum_{i=j}^m \binom{i}{i-j} q^{i-j} \bar{a}_i = \sum_{i=j}^m \binom{i}{i-j} \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{i-j} \left(\frac{1-\epsilon}{2} \right)^i a_i \quad (4.48)$$

berechnet werden. Damit sind die Koeffizienten von $\tilde{f}(\tilde{v})$ als gewichtete Summe der Koeffizienten von $f(v)$ dargestellt.

Im nächsten Schritt sind die als bekannt vorausgesetzten Koeffizienten von $f(v)$ in Abhängigkeit der unbekannten Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 auszudrücken. Es ist einfach zu erkennen, dass der erste Term des Ausdrucks (4.45) zu den Koeffizienten der Monome der Ordnung 1 bis $m \leq 2n-1$ beiträgt und der zweite Term zu solchen der Ordnung 0 bis $(m-1)/2$.

Um den Koeffizienten vor dem Monom mit gewünschter Potenz zu selektieren, wird eine Hilfsmatrix

$$\mathbf{H}(k) = \begin{cases} \mathbf{H}_{i,j} = 1 & \text{für } i = j = k, \\ \mathbf{H}_{i,j} = 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

eingeführt. Damit lässt sich der Koeffizient a_i vor dem i -ten Monom gemäß der Vorschrift

$$a_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^i \mathbf{a}^T \mathbf{H}(n+k-i) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{H}(n-k+1) \mathbf{a} - \\ \quad - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{H}(n-i) \mathbf{a} & \text{für } i \leq (m-1)/2 \\ \sum_{k=1}^{2n-i} \mathbf{a}^T \mathbf{H}(k) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{H}(2n-i-k+1) \mathbf{a} & \text{für } i < m+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.49)$$

bestimmen. Die beiden Formeln (4.48) und (4.49) ermöglichen die Darstellung der Koeffizienten des transformierten Polynoms \tilde{a}_j , $j = 0, \dots, m$ in Abhängigkeit von den Unbekannten $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 . Eine Anwendung des Lemmas 4.5 ist nun möglich und liefert folgenden Satz:

Satz 4.4 *Die Ungleichung $\max_{v \in (0,1]} e'(v) < 0$ ist genau dann erfüllt, wenn Matrizen $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{l(k-1) \times l(k-1)}$ und $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{l(k-1) \times n(k-1)}$ existieren, so dass die Bedingungen*

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{G} + \mathbf{G}^T = 0, \quad (4.50)$$

$$\Theta_\Sigma < \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{S} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

erfüllt sind, wobei Θ_Σ als

$$\Theta_\Sigma = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & & & & \\ \tilde{a}_1 & 2\tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & & & \mathbf{0} \\ & \tilde{a}_3 & 2\tilde{a}_4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \tilde{a}_{m-2} & \\ \mathbf{0} & & & \tilde{a}_{m-2} & 2\tilde{a}_{m-1} & \tilde{a}_m \\ & & & & \tilde{a}_m & 0 \end{bmatrix}$$

definiert ist. Mit \tilde{a}_i werden die Koeffizienten des gemäß (4.46) transformierten Polynoms $\tilde{f}(\tilde{v})$ der Ordnung $m \leq 2n-1$ bezeichnet. Dabei wird $\epsilon \rightarrow 0$ gefordert. Die Matrizen \mathbf{C} und \mathbf{J} sind gemäß des Lemmas 4.5 definiert.

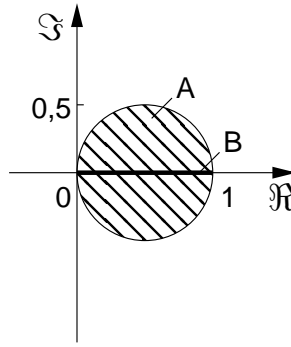


Abbildung 4.2: Bei der Anwendung: A - der Regel von Newton, B - des Satzes 4.4 ist die Wahl der Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 dadurch begrenzt, dass das Polynom $e'(v)$ keine Wurzeln in den markierten Bereichen besitzt.

Beweis: Die Ungleichung $\max_{v \in (0,1]} e'(v) < 0$ ist äquivalent zur Forderung

$$\begin{aligned} & \frac{-2}{u_{\max}^2 v} (\mathbf{a}^T \mathbf{D}(v) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{D}(v) \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{D}(v) \mathbf{a}) < 0, \forall v \in [\epsilon \rightarrow 0, 1] \\ \Leftrightarrow & \mathbf{a}^T \mathbf{D}(v) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \frac{\mathbf{D}(v)}{v} \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \frac{\mathbf{D}(v)}{v} \mathbf{a} > 0, \forall v \in [\epsilon \rightarrow 0, 1]. \end{aligned}$$

Gemäß der Transformationsvorschrift (4.46) wird das Intervall $[\epsilon, 1]$ in das Intervall $[-1, 1]$ transformiert und man erhält eine äquivalente Forderung für die Variable \tilde{v} :

$$\tilde{f}(\tilde{v}) = \tilde{a}_m \tilde{v}^m + \tilde{a}_{m-1} \tilde{v}^{m-1} + \dots + \tilde{a}_1 \tilde{v} + \tilde{a}_0 > 0, \forall \tilde{v} \in [-1, 1], \quad (4.52)$$

wobei sich die Koeffizienten $\tilde{a}_i, i = 0, \dots, m$ nach Gl. (4.48) und Gl. (4.49) berechnen lassen. Die Ordnung m des Polynoms $\tilde{f}(\tilde{v})$ ist genau so wie die Ordnung m des Polynoms $f(v)$ durch den Term $\mathbf{a}^T \mathbf{D}(v) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \frac{\mathbf{D}(v)}{v} \mathbf{a}$ festgelegt und damit für $\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ungerade. Daher kann man die Ungleichung (4.52) in der Form

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{v} \\ \tilde{v}^2 \\ \vdots \\ \tilde{v}^{\frac{m-1}{2}} \\ \tilde{v}^{\frac{m+1}{2}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2\tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & & & & \\ \tilde{a}_1 & 2\tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & & & \\ & \tilde{a}_3 & 2\tilde{a}_4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \tilde{a}_{m-2} & \\ \mathbf{0} & & & \tilde{a}_{m-2} & 2\tilde{a}_{m-1} & \tilde{a}_m \\ & & & & \tilde{a}_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{v} \\ \tilde{v}^2 \\ \vdots \\ \tilde{v}^{\frac{m-1}{2}} \\ \tilde{v}^{\frac{m+1}{2}} \end{bmatrix} > 0,$$

$\forall \tilde{v} \in [-1, 1]$ darstellen. Mit $\boldsymbol{\rho}^{[k]} := (1, \tilde{v}, \tilde{v}^2, \dots, \tilde{v}^{\frac{m+1}{2}})^T$, $\mathbf{I}_l = 1$ und

$$\boldsymbol{\Theta}_\Sigma = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & & & & & \\ \tilde{a}_1 & 2\tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & & & & \mathbf{0} \\ & \tilde{a}_3 & 2\tilde{a}_4 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \tilde{a}_{m-2} & & \\ \mathbf{0} & & & \tilde{a}_{m-2} & 2\tilde{a}_{m-1} & \tilde{a}_m & \\ & & & & \tilde{a}_m & 0 & \end{bmatrix}$$

lässt sich die Ungleichung weiter zu

$$(\tilde{\mathbf{v}}^{[k]} \otimes \mathbf{I}_l)^T \boldsymbol{\Theta}_\Sigma (\tilde{\mathbf{v}}^{[k]} \otimes \mathbf{I}_l) \prec 0, \quad \forall \tilde{v} \in [-1, 1]$$

umformen. Die Anwendung des Lemmas 4.5 liefert nun die Bedingungen (4.50) und (4.51). Da in jedem Schritt äquivalente Umformungen durchgeführt wurden, sind die Bedingungen hinreichend und notwendig. \square

Die in Satz 4.4 formulierten Bedingungen sind weniger konservativ als die mittels der Regel von Newton erhaltenen Bedingung (4.41) (siehe Abb. 4.2). Zu vermerken ist jedoch, dass sie konservativer im Vergleich zu der Bedingung (4.20) sind, da sie im Intervall $(0, 1]$ keine reellen Nullstellen der Gleichung $e'(v) = 0$ zulassen. Allerdings sind die Simulationsergebnisse, unabhängig von der verwendeten Bedingung (Bedingung (4.20), (4.41) oder den Bedingungen in Satz 4.4), meistens sehr ähnlich.

4.4 Einschließen aller Anfangsauslenkungen

Im vorherigen Abschnitt 4.3 wurden zwei verschiedene Möglichkeiten zur Vereinfachung der Monotoniebedingung (4.20) vorgestellt. Die neuen Bedingungen haben den Vorteil, dass sie sich sehr einfach als LMIs in den Variablen $\mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1^{-1} darstellen lassen. Im Weiteren ist nun die Bedingung (4.21) in LMI-Form zu überführen. Diese stellt sicher, dass die Menge aller möglichen Anfangsauslenkungen \mathcal{X}_0 innerhalb des Ellipsoids $e(1)\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 < 0$ liegt. Eine Umformung ist einfacher zu realisieren, wenn der Skalierungsfaktor $e(1)$ und die Ungleichung $\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 < 0$ getrennt betrachtet werden. Diese Aufteilung stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, da die Matrix \mathbf{R}_1 , wie im folgenden Lemma 4.6 gezeigt wird, beliebig skalierbar ist.

Lemma 4.6 *Es existiert ein Faktor s , so dass für $\hat{\mathbf{R}}_1 = s^{-1}\mathbf{R}_1$ die Ungleichung (4.21) äquivalent zu den Forderungen*

$$\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{x} < 1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0, \quad (4.53)$$

$$\hat{e}(1) \leq 1 \quad (4.54)$$

ist. Dabei ist $\hat{e}(1) = \frac{1}{u_{\max}^2} [\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \mathbf{a} - 2\hat{\mathbf{a}}^T \hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \mathbf{a} + \hat{\mathbf{a}}^T \hat{\mathbf{R}}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}}] = s \cdot e(1)$.

Beweis: Es ist offensichtlich, dass wenn (4.53) und (4.54) gelten, auch (4.21) erfüllt ist. Zu beweisen bleibt, dass bei Wahl einer geeigneten Skalierung für \mathbf{R}_1 aus Bedingung (4.21) die Bedingungen (4.53) und (4.54) folgen. Dies geschieht wie folgt:

$$\begin{aligned} & e(1) \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \\ \Leftrightarrow & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} < \frac{1}{e(1)}, \text{ da } e(1) > 0 \\ \Leftrightarrow & \exists s, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} < s \leq \frac{1}{e(1)} \\ \Leftrightarrow & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad \mathbf{x}^T s^{-1} \mathbf{R}_1 \mathbf{x} < 1 \text{ und } se(1) \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{R}}_1 \mathbf{x} < 1 \text{ und } \hat{e}(1) = se(1) \leq 1. \quad \square \end{aligned}$$

Wir nehmen nun an, dass \mathbf{R}_1 geeignet skaliert ist. Die Anwendung des Schur-Komplement-Lemmas (3.1) auf Ungleichung (4.53) liefert:

$$\mathbf{R}_1 \succ 0, \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} < 1, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{R}_1^{-1} \end{bmatrix} \succ 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0. \quad (4.55)$$

Wenn \mathcal{X}_0 ein konvexes Polytop ist, genügt es, die Bedingung (4.53) in den Eckpunkten zu überprüfen. Analog ist Gl. (4.54) äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 - \mathbf{a}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{a} + 2\hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{a} & \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \\ \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}} & \mathbf{R}_1^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (4.56)$$

Die Bedingung (4.21) wird also durch die LMIs (4.55) und (4.56) ersetzt.

Diese LMIs sind, wie im Folgenden gezeigt wird, äquivalent zu den Bedingungen, die ein lineares stabiles System erfüllen muss, um die Stellgrößenbeschränkung $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}(t)| \leq u_{\max}$ für eine Menge vorgegebener Anfangszustände \mathcal{X}_{anf} einzuhalten. Wir setzen voraus, dass $\mathcal{X}_0 \equiv \mathcal{X}_{anf}$ ist und betrachten das stabile lineare System $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T(1))\mathbf{x}$ mit der

Ljapunov-Funktion $v = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}$. Gemäß [12] ist $|\mathbf{k}(1)^T \mathbf{x}(t)| \leq u_{\max}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$ und $t \geq 0$ erfüllt, wenn die Bedingungen

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{R}_1^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{-1} & \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{k}(1) \\ \mathbf{k}^T(1) \mathbf{R}_1^{-1} & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succeq 0 \quad (4.57)$$

gelten. Wird eine strikte Zulässigkeit der ersten Bedingung gefordert, sind diese äquivalent zu den Forderungen (4.55) und (4.56). Für die erste Bedingung ist dies offensichtlich. Im Weiteren wird gezeigt, dass die zweite äquivalent zur Ungleichung (4.56) ist. Zu diesem Zweck werden folgende Umformungen durchgeführt:

$$(4.56) \Leftrightarrow e(1) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{k}^T(1) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{k}(1)}{u_{\max}^2} \leq 1 \Leftrightarrow u_{\max}^2 - \mathbf{k}^T(1) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{k}(1) \geq 0,$$

$$\text{mit } \mathbf{R}_1 \succ 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{\max}^2 & \mathbf{k}^T(1) \\ \mathbf{k}(1) & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Da die Lösungsmenge invariant in Bezug auf Kongruenztransformationen ist (siehe Abschnitt 3.2), erhält man

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times 1} & \mathbf{R}_1^{-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{1 \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\max}^2 & \mathbf{k}^T(1) \\ \mathbf{k}(1) & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times n} & 1 \\ \mathbf{R}_1^{-1} & \mathbf{0}_{n \times 1} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{-1} & \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{k}(1) \\ \mathbf{k}^T(1) \mathbf{R}_1^{-1} & u_{\max}^2 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

Bedingung (4.21) ist also nur eine andere Darstellungsform der bei den linearen Systemen gängigen Bedingungen (4.57). Sie stellt nicht nur sicher, dass die Menge aller möglichen Anfangsauslenkungen \mathcal{X}_0 innerhalb der Ellipse $e(1) \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 < 0$ liegt, sondern auch, dass die Stellgrößenbeschränkung

$$|\mathbf{k}^T(1) \mathbf{x}(t)| \leq u_{\max} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0 \quad \text{mit } \mathbf{k}(1) = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$$

nie verletzt wird.

Das in Abschnitt 4.2 gesetzte Ziel ist damit erreicht. Alle Nebenbedingungen können nun als LMIs in den Variablen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}} \quad (4.58)$$

dargestellt werden und sind im Folgenden zusammengefasst:

$$\mathbf{Q} \succ 0, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A}^T + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) + (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{a}^T)\mathbf{Q} - \mathbf{z}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{z}^T \prec 0, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{Q} \prec 0, \quad (4.61)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.62)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 - \mathbf{a}^T \mathbf{Q} \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{z} & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (4.63)$$

für $\forall i \in \{0, 1, \dots, m\}$:

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}^T \mathbf{P}(0, i-k) \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{P}(0, k) \mathbf{a} - \mathbf{z}^T \mathbf{N} \mathbf{P}(n, i) \mathbf{a} \geq 0 \quad (4.64)$$

$$\text{mit } \mathbf{P}(l, k) = \begin{cases} \prod_{q=0}^{k-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] & \text{für } k \neq 0 \\ \mathbf{I} & \text{für } k = 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}(0, 1, \dots, n-1).$$

Anstelle der Bedingung (4.64) kann man auch die Bedingung

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{G} + \mathbf{G}^T = \mathbf{0}, \quad \Theta_{\Sigma} < \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{S} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad (4.65)$$

wobei

$$a_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^i \mathbf{a}^T \mathbf{H}(n+k-i) \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{H}(n-k+1) \mathbf{a} - \\ \quad - \mathbf{z}^T \mathbf{N} \mathbf{H}(n-i) \mathbf{a} & \text{für } i \leq (m-1)/2 \\ \sum_{k=1}^{2n-i} \mathbf{a}^T \mathbf{H}(k) \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{H}(2n-i-k+1) \mathbf{a} & \text{für } i < m+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{cases} \mathbf{H}_{i,j} = 1 & \text{für } i = j = k \\ \mathbf{H}_{i,j} = 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\tilde{a}_j = \sum_{i=j}^m \binom{i}{i-j} \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{i-j} \left(\frac{1-\epsilon}{2} \right)^i a_i$$

$$\text{und } \Theta_{\Sigma} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & & & & \\ \tilde{a}_1 & 2\tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & & & \\ & \tilde{a}_3 & 2\tilde{a}_4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \tilde{a}_{m-2} & 2\tilde{a}_{m-1} & \tilde{a}_m \\ & & & & \tilde{a}_m & 0 \end{bmatrix},$$

verwenden, die theoretisch weniger konservativ ist.

Damit ein konvexes Optimierungsproblem vorliegt, benötigt man neben konvexen Nebenbedingungen noch eine konvexe Gütefunktion. Im folgenden Abschnitt 4.5 wird auf eine geeignete Auswahl dieser Funktion eingegangen.

4.5 Wahl einer Gütefunktion

In diesem Abschnitt werden drei verschiedene konvexe Gütefunktionen betrachtet. Da die Ausregelzeit im Allgemeinen keine konvexe Funktion ist, kann sie damit nur indirekt beeinflusst werden. Eine weitere Besonderheit ist, dass die vorgestellten Gütefunktionen nur die Dynamik des LTI-Systems $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}$ beeinflussen. Die Grundidee dabei ist, dass eine gute Dynamik des Systems bei $v = 1$ zu einem besseren Verhalten des nichtlinearen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}(v) \mathbf{x}$ führt. Eine pauschale Aussage, welche dieser Gütefunktionen die besten Ergebnisse liefert, ist daher schwer möglich. Sehr gute Ausregelzeiten sind in den meisten Fällen mittels der in Abschnitt 4.5.1 vorgestellten Methode zu erreichen.

4.5.1 Volumen-Maximierung des Anfangsgebiets

Bei dieser Methode wird ein zulässiger Anfangsregler $\mathbf{k}_1 = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$ so festgelegt⁵, dass er für die maximalen Anfangsauslenkungen möglichst gut die Stellgröße ausnutzt. Dann wird die Matrix \mathbf{R}_1 durch Maximieren des Volumens des nach Gl. (4.21) definierten Anfangsgebiets $\mathcal{G}(1)$ bestimmt.

Im Weiteren ist zu zeigen, dass das Maximieren des Volumens von $\mathcal{G}(1)$ in Abhängigkeit von \mathbf{R}_1 ein konvexes Optimierungsproblem dar-

⁵Das ist der Hauptunterschied zu den in nächsten Abschnitten beschriebenen Verfahren, wo der Reglerparameter $\hat{\mathbf{a}}$ und die Matrix \mathbf{R}_1 gleichzeitig optimiert werden. Dies ist beim Maximieren des Volumens nicht möglich, da dann unter Umständen ein unbeschränktes Optimierungsproblem vorliegt. Ist z.B. das unregelte System stabil, kann das Volumen des Einzugsgebiets unendlich groß werden.

stellt. Das Gebiet ist durch den Faktor $e(1)$ skaliert, was die Volumenberechnung erschwert. Das Problem lässt sich deutlich vereinfachen, indem statt der skalierten die unskalierten Gebiete $\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{E}_2(\mathbf{R}_1) \mid \mathbf{R}_1 \succ 0 \text{ und } \mathcal{E}_2(\mathbf{R}_1) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 = 0 \text{ und } |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max}\}\}$ innerhalb des Bereichs $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max}$ betrachtet werden. Dies ist zulässig, da der folgende Satz gilt:

Satz 4.5 *Sei $\mathcal{F}_1 = \{\mathcal{E}_1(\mathbf{R}_1) \mid \mathbf{R}_1 \succ 0 \text{ und } \mathcal{E}_1(\mathbf{R}_1) = \{\mathbf{x} \mid e(1)\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 = 0 \text{ und } e(1) = \frac{\mathbf{k}^T(v)\mathbf{R}_1^{-1}(v)\mathbf{k}(v)}{u_{\max}^2} = 1\}\}$ die Menge aller Ellipsoide, die die Hyperebene $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| = u_{\max}$ tangieren. Sei weiterhin $\mathcal{F}_2 = \{\mathcal{E}_2(\mathbf{R}_1) \mid \mathbf{R}_1 \succ 0 \text{ und } \mathcal{E}_2(\mathbf{R}_1) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1 = 0 \text{ und } |\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max}\}\}$ die Menge aller Ellipsoide, die innerhalb des Bereichs $|\mathbf{k}^T \mathbf{x}| \leq u_{\max}$ liegen. Die Menge $\mathcal{F}_1^{\text{opt}} = \arg \max_{\mathbf{R}_1} \{\text{Vol}(\mathcal{E}_1(\mathbf{R}_1))\}$ ist dann äquivalent zu $\mathcal{F}_2^{\text{opt}} = \arg \max_{\mathbf{R}_1} \{\text{Vol}(\mathcal{E}_2(\mathbf{R}_1))\}$.*

Beweis: Aus $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ folgt $\mathcal{F}_1^{\text{opt}} \subseteq \mathcal{F}_2^{\text{opt}}$. Außerdem stellt man beim Vergleich der Volumina von $\mathcal{E}_1(\mathbf{R}_1) \in \mathcal{F}_1$ und $\mathcal{E}_2(\mathbf{R}_1) \in \mathcal{F}_2$ fest, dass $\text{Vol}(\mathcal{E}_2(\mathbf{R}_1)) \leq \text{Vol}(\mathcal{E}_1(\mathbf{R}_1))$ bzw. $\mathcal{F}_2^{\text{opt}} \subseteq \mathcal{F}_1^{\text{opt}}$ ist, da $\mathbf{R}_1 - e(1)\mathbf{R}_1 \geq 0$ und damit $\mathcal{E}_2(\mathbf{R}_1) \subseteq \mathcal{E}_1(\mathbf{R}_1)$ gilt. Die Menge $\mathcal{F}_1^{\text{opt}}$ ist also gleich $\mathcal{F}_2^{\text{opt}}$. \square

Nach Satz 4.5 ist das Ergebnis der Optimierung unabhängig davon, ob man das Volumen der Ellipsoiden der Menge \mathcal{F}_1 oder \mathcal{F}_2 optimiert. Im Folgenden werden deswegen die unskalierten Gebiete \mathcal{F}_2 betrachtet. deren Volumen ist proportional zu $\det \mathbf{R}_1^{-1}$. Es wird also die Lösung des Determinanten-Maximierungsproblem

$$\max_{\mathbf{Q}} \det \mathbf{Q} \quad (4.66)$$

gesucht, wobei $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1}$ ist. Dies ist ein bekanntes Problem [62, 89]. Die Funktion $-\det \mathbf{Q}$ ist zwar nicht konvex, das Problem ist aber nach einer monotonen Transformation als konvexes Problem darstellbar. Man minimiert z. B. die Funktion⁶ $-(\det \mathbf{Q})^{1/n}$.

Lemma 4.7 *Die Funktion $f(\mathbf{Q}) = -(\det \mathbf{Q})^{1/n}$ ist konvex in $\mathcal{S} = \{\mathbf{Q} \mid \mathbf{Q} \succ 0\}$, wobei n der Dimension der symmetrischen Matrix \mathbf{Q} entspricht.*

Beweis: Wir benutzen die Feststellung aus [13], dass eine Funktion $f(x)$ genau dann konvex ist, wenn die Funktion $g(s) = f(x + sv)$ für

⁶Diese Funktion ist beispielsweise im Matlab-Interface YALMIP [62] als die Funktion `geomean` implementiert.

$x \in \mathcal{D}$ und alle v und s , für die $x + sv \in \mathcal{D}$ gilt, konvex ist. Dabei bezeichnet \mathcal{D} den Definitionsbereich von x . Wir möchten also beweisen, dass $g(s) = -(\det(\mathbf{Q} + s\mathbf{V}))^{1/n}$ konvex ist, wobei \mathbf{V} so gewählt ist, dass $\mathbf{Q} + s\mathbf{V} \succ 0$ für $\mathbf{Q} \succ 0$. Nach Transformation mit der regulären Matrix $\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}$ erhält man $\mathbf{I} + s\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}} \succ 0$ bzw. $1 + s\lambda_i > 0$. Mit $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ werden die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}$ bezeichnet. Für die Funktion $g(s)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\det(\mathbf{Q} + s\mathbf{V})} &= \sqrt[n]{\det(\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I} + s\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{V}\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}})\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}})} = \\ &= \sqrt[n]{\det \mathbf{Q} \prod_{i=1}^n (1 + s\lambda_i)} = \sqrt[n]{\det \mathbf{Q}} \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{1 + s\lambda_i}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Die Funktion $g(s)$ ist konvex, wenn die zweite Ableitung nach $g(s)''$ nicht negativ ist. Nach zweimaligem Ableiten nach s erhält man

$$g(s)'' = \frac{n-1}{n^2} \sqrt[n]{\det \mathbf{Q}} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^2}{(1 + s\lambda_k)^2} \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{1 + s\lambda_i}. \quad (4.68)$$

Da $n \in \mathbb{N}$ und $1 + s\lambda_i > 0$ ist, gilt auch $g(s) \geq 0$. Damit ist sichergestellt, dass $g(s)$ bzw. $f(\mathbf{Q})$ konvex ist. \square

4.5.2 Maximieren der Abklingrate des Anfangssystems

Die Abklingrate eines LTI-Systems $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}$ ist in [12] definiert als das größte α , für das gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} |\mathbf{x}(t)| = 0.$$

Bei solchen Systemen entspricht $-\alpha$ dem maximalen Realteil der Eigenwerte der Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}_1$, was man leicht erkennt, wenn man die Lösung des Differentialgleichungssystems $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\hat{\mathbf{A}}_1 t}$ bestimmt, wobei \mathbf{v} ein konstanter, vom Anfangszustand abhängiger Vektor mit der Dimension der Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$ ist. Der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{v}e^{(\hat{\mathbf{A}}_1 + \alpha \mathbf{I})t}|$ konvergiert für alle \mathbf{v} nur dann gegen null, wenn der Realteil der Eigenwerte des Exponenten $\hat{\mathbf{A}}_1 + \alpha \mathbf{I}$ negativ ist. Für stabile Systeme ist α immer positiv.

Unter der Voraussetzung

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} \leq -2\beta V(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x}, \quad (4.69)$$

wobei $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R} \mathbf{x}$ eine quadratische Ljapunov-Funktion ist, kann die Abklingrate nach unten abgeschätzt werden. Dabei ist $\beta \leq \alpha$ ein positiver Faktor. Die Forderung (4.69) ist in unserem Fall äquivalent zur LMI-Bedingung

$$\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 + 2\beta \mathbf{R}_1 \preceq 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q} \hat{\mathbf{A}}_1^T + \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{Q} + 2\beta \mathbf{Q} \preceq 0. \quad (4.70)$$

Das größte β lässt sich nun numerisch durch Lösung des generalisierten Eigenwertproblems

$$\max_{\mathbf{Q}, \beta} \beta$$

unter den Nebenbedingungen (4.59) bis (4.64) bzw. (4.65) bestimmen, wobei Gl. (4.60) durch die Bedingung

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A}^T + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) + (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{a}^T)\mathbf{Q} - \mathbf{z}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{z}^T + 2\beta \mathbf{Q} \prec 0 \quad (4.71)$$

ersetzt wird. Dies ist ein häufig vorkommendes LMI-Problem [12, 45]. Wegen des Terms $\beta \mathbf{Q}$ ist das Problem nur dann konvex, wenn β während der Optimierung konstant bleibt. Das optimale β wird daher iterativ bestimmt. Die Lösung des Problems wird für ein festes β ermittelt. Falls es möglich ist, ein größeres β zu bestimmen, wofür das Problem immer noch eine Lösung hat, beginnt nach einer Anpassung von β ein neuer Iterationsschritt. Anschaulich erklärt, werden die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{A}}_1$ in jedem Schritt so verschoben, dass deren Realteile kleiner oder gleich dem vorgegebenen β sind. Dies wird wiederholt, sofern eine Matrix \mathbf{R}_1 existiert, die die Bedingung (4.70) erfüllt.

Des Weiteren wird der Frage nachgegangen, inwieweit β eine Aussage über die tatsächliche Abklingrate α liefert. Um dies zu untersuchen, wird die Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$, und dadurch auch α , fest vorgegeben und nur die Matrix $\mathbf{R}_1 \succ 0$ optimiert. Unterliegt \mathbf{R}_1 keinen zusätzlichen Nebenbedingungen, liefert die Optimierung das erwartete Ergebnis $\beta_{\max} = \alpha$, was nach Umstellung der Gleichung (4.70)

$$(\hat{\mathbf{A}}_1^T + \beta \mathbf{I}) \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 (\hat{\mathbf{A}}_1 + \beta \mathbf{I}) \preceq 0 \quad (4.72)$$

leicht nachzuvollziehen ist⁷. Falls aber $\mathbf{R}_1 \succ 0$ wie in unserem Fall durch zusätzliche Nebenbedingungen begrenzt wird, ist es durchaus möglich,

⁷Da $\mathbf{R}_1 \succ 0$ ist, wird die Forderung (4.72) nur dann eingehalten, wenn $\Re(\lambda(\hat{\mathbf{A}}_1)) + \beta \leq 0$ und deswegen auch $-\alpha + \beta \leq 0$ ist. Daher ist $\beta_{\max} = \alpha$.

dass für $\beta = \alpha$ keine zulässige Matrix \mathbf{R} existiert, so dass die Bedingung (4.72) eingehalten wird. Das maximale β ist in diesem Fall strikt kleiner als α , und es ist nicht möglich, von β_{\max} auf die tatsächliche Abklingrate α zu schließen. Inwieweit β eine gute Abschätzung von α ist, hängt von den Nebenbedingungen ab.

Werden daher $\hat{\mathbf{A}}_1$ und \mathbf{R}_1 gleichzeitig unter den Nebenbedingungen (4.59) bis (4.64) optimiert, bekommt man nicht unbedingt die Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$ mit der besten Abklingrate, sondern die Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$, für welche die untere Grenze der Abklingrate β maximal ist. Daher ist es manchmal sinnvoll, anstatt $\hat{\mathbf{A}}_1$ und \mathbf{R}_1 gleichzeitig zu optimieren, einen guten, zulässigen Anfangsregler⁸ festzulegen und nur die Matrix \mathbf{R}_1 zu optimieren. In diesem Fall liefert die Optimierung von β die Matrix \mathbf{R}_1 , für welche die quadratische Ljapunov-Funktion $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}$ am schnellsten abnimmt.

4.5.3 Minimieren eines quadratischen Gütemaßes

Ein weiteres häufig verwendetes Optimierungskriterium (siehe z. B. [12]) ist das Minimieren der Ausgangsenergie $\int_0^\infty \mathbf{y}^T \mathbf{y} dt$. Dieses Gütemaß lässt sich zu dem Maß $\int_0^\infty \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{G}} \mathbf{x} dt$ verallgemeinern, wobei $\hat{\mathbf{G}} \succ 0$. Das Ziel ist dann, dieses quadratische Gütemaß zu minimieren. Im Weiteren ist zuerst zu zeigen, dass dieses Gütemaß auch für das LTI-System $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}$ begrenzt ist. Daher ist folgendes Lemma zu beweisen:

Lemma 4.8 *Sei für $\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1} \succ 0$ die Bedingung*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{A}^T + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) + (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{a}^T)\mathbf{Q} - \mathbf{z}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{z}^T & \mathbf{Q}\mathbf{W} \\ \mathbf{W}^T\mathbf{Q} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \preceq 0 \quad (4.73)$$

erfüllt, dann ist das Integral

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{G}} \mathbf{x} dt \leq \gamma. \quad (4.74)$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$. Dabei ist $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{W}^T \mathbf{W} \succ 0$ und $\gamma > 0$.

⁸Der Regler wird wie im vorherigen Abschnitt so gewählt, dass er für die maximalen Auslenkungen möglichst gut die Stellgröße ausnutzt.

Beweis: Der Wert des Integrals (4.74) bleibt durch Addition von Null unverändert

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{G}} \mathbf{x} dt + \underbrace{\int_0^\infty \frac{\gamma}{e(1)} g_t(1, \mathbf{x}) dt - \frac{\gamma}{e(1)} \int_0^\infty g_t(1, \mathbf{x}) dt}_0.$$

Mit $g_t(1, \mathbf{x}) = e(1)\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} - 1$, $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{W}^T \mathbf{W}$ und $\mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0$ vereinfacht sich das Integral zu

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T (\mathbf{W}^T \mathbf{W} + \gamma(\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1)) \mathbf{x} dt - \frac{\gamma}{e(1)} (-1 - e(1)\mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_0 + 1),$$

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T (\mathbf{W}^T \mathbf{W} + \gamma(\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1)) \mathbf{x} dt + \gamma \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_0.$$

Betrachten wir nun die Matrix $\mathbf{W}^T \mathbf{W} + \gamma(\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1)$, so fällt auf, dass diese nach beidseitiger Multiplikation mit \mathbf{Q} und Anwendung des Schur-Komplement-Lemmas äquivalent zu der Matrix (4.73) ist und damit negativ semidefinit ist. Der Integrand ist daher stets kleiner oder gleich Null. Das Integral J ist durch $\gamma \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_0$ nach oben begrenzt. Für $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_0$ gilt die Forderung (4.55), d. h. $\gamma \mathbf{x}_0^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_0 \leq \gamma$ und $J \leq \gamma$. \square

Möchte man nun diese Grenze minimieren, muss das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{Q}, \mathbf{z}} \gamma$$

unter den Nebenbedingungen (4.59) bis (4.64) oder (4.65) gelöst werden, wobei die Bedingung (4.60) durch die Forderung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{A}^T + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) + (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{a}^T)\mathbf{Q} - \mathbf{z}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{z}^T & \mathbf{Q}\mathbf{W} \\ \mathbf{W}^T \mathbf{Q} & -\gamma \end{bmatrix} \preceq 0.$$

ersetzt wird.

4.6 Untersuchung der Menge zulässiger Parameter

Bei einem Optimierungsproblem kann es unter bestimmten Umständen dazu kommen, dass die Menge der zulässigen Parameter leer ist. Inwie-

weit dies in unserem Fall möglich ist, soll in diesem Abschnitt geklärt werden.

Die Menge der zulässigen Parameter ist bei unserem Optimierungsproblem durch die in Abschnitt 4.4 zusammengefassten Matrixungleichungen (4.59) bis (4.64) bzw. (4.65) definiert. Betrachten wir zuerst die ersten drei Bedingungen. Die Forderungen (4.59) und (4.61) lassen sich mit Hilfe des Lemmas A.1 auf die Ungleichung (4.61) reduzieren. Die Forderung $\mathbf{QN} + \mathbf{NQ} \prec 0$ stellt demnach auch $\mathbf{Q} \succ 0$ sicher.

Nun ist zu untersuchen, ob sich die Bedingungen (4.60) und (4.61) immer erfüllen lassen. Besitzt die Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{b}(\hat{\mathbf{a}}^T - \mathbf{a}^T)$ für alle zulässigen $\hat{\mathbf{a}}$ instabile Eigenwerte, dann ist die Bedingung (4.60) für jede beliebige Matrix $\mathbf{Q} \succ 0$ verletzt. Da aber die Bedingung $\mathbf{QN} + \mathbf{NQ} \prec 0$ keine Beschränkung bei der Wahl von $\hat{\mathbf{a}}$ darstellt, lässt sich unter den Nebenbedingungen (4.60) bis (4.61) immer ein $\hat{\mathbf{a}}$ finden, so dass das geregelte System stabil ist. Die Frage ist nun, ob für jede Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$ mit stabilen Eigenwerten immer eine Matrix \mathbf{Q} existiert, so dass (4.60) und (4.61) gleichzeitig eingehalten werden, oder anders ausgedrückt, wann die zwei Matrizen $\hat{\mathbf{A}}_1$ und \mathbf{N} eine gemeinsame quadratische Ljapunov-Matrix besitzen.

Dieses Problem tritt häufig bei Untersuchungen der Stabilität schaltender Systeme oder Robustheitsproblemen auf (siehe z. B. [64, 75]). Dabei ist zu bestimmen, ob eine gegebene Menge von stabilen Matrizen $\{\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_m\}$ eine gemeinsame quadratische Ljapunov-Funktion besitzt oder nicht. Im Allgemeinen wird dieses Problem numerisch gelöst, da einfache analytische Kriterien nur für Matrizen mit bestimmter Struktur existieren [64]. Für eine Menge bestehend aus einem Paar zweidimensionaler Matrizen lässt sich eine einfache analytische Bedingung für die Existenz einer gemeinsamen quadratischen Ljapunov-Funktion auch für Matrizen mit beliebiger Struktur angeben (siehe Anhang, Satz A.3). Angewendet auf den konkreten Fall ergibt das:

Korollar 4.1 *Die stabile Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $\mathbf{N} = \text{diag}(-2, -1)$ haben immer eine gemeinsame quadratische Ljapunov-Funktion.*

Beweis: Laut Satz A.3 haben die Matrizen $\hat{\mathbf{A}}_1$ und \mathbf{N} nur dann eine gemeinsame quadratische Ljapunov-Funktion, wenn die Produkte $\hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{N}$ und $\hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{N}^{-1}$ keine Eigenwerte besitzen, die reell und negativ sind. Da die Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$ stabil ist, sind die Elemente $a_0, a_1 > 0$. Das charakteristische

Polynom von $\hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{N}$, $p(x) = x^2 - a_1 x + 2a_0$, hat dann entweder eine konjugiert komplexe Nullstelle oder zwei positive reelle Nullstellen. Dies gilt ebenfalls für das charakteristische Polynom von $\hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{N}^{-1}$. Die Matrizen $\hat{\mathbf{A}}_1$ und \mathbf{N} haben also immer eine gemeinsame quadratische Ljapunov-Funktion. \square

Auch bei höheren Dimensionen lässt sich relativ einfach numerisch eine gemeinsame Ljapunov-Funktion finden, die die Bedingungen (4.59) bis (4.61) erfüllt. Die Bedingung (4.62) fordert dann zusätzlich, dass eine vorgegebene Menge möglicher Anfangsauslenkungen \mathcal{X}_0 innerhalb des Gebiets $\mathcal{G}_1 = \{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} \leq 1\}$ liegt. Da sich die Matrix \mathbf{R}_1 bzw. \mathbf{Q} beliebig skalieren lässt, ohne dass die Ungleichungen (4.59) bis (4.61) verletzt werden, kann \mathbf{R}_1 immer so gewählt werden, dass die gewünschte Menge \mathcal{X}_0 eingeschlossen ist. Das Einhalten der ersten vier Bedingungen ist daher unproblematisch.

Wird jedoch zusätzlich auch noch die Stellgröße beschränkt, besteht die Möglichkeit, dass die Menge zulässiger Parameter leer ist. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Matrix \mathbf{A} Eigenwerte mit positivem Realteil besitzt und die zur Verfügung stehende Stellgröße nicht zur Stabilisierung des Systems ausreicht. Sogar unter der Bedingung, dass eine Stabilisierung mittels eines linearen Reglers möglich ist, kann es bei einem instabilen System vorkommen, dass sich für die Matrix \mathbf{R}_1 kein Skalierungsfaktor s finden lässt, so dass die Ungleichungen (4.62) und (4.63) gelten. Dieser Fall wird für ein zweidimensionales System in Abb. 4.3 illustriert. Unter den zulässigen Ellipsoiden $s \cdot \mathcal{G}_1$, wobei $\mathcal{G}_1 = \{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_1 \mathbf{x} \leq 1\}$ ist,

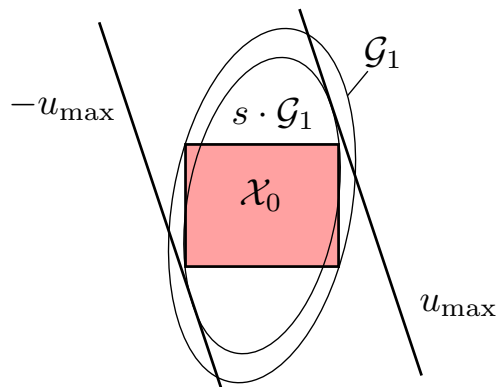


Abbildung 4.3: Ein Problem, das beim vorgegebenem Anfangsregler \mathbf{k}_1 auftreten kann. Es ist unmöglich die Ellipse \mathcal{G}_1 so zu skalieren, dass sie \mathcal{X}_0 einschließt und zwischen $\pm u_{\max}$ liegt.

existiert keine Lösung, die die Menge \mathcal{X}_0 einschließt und dabei die Stellgrößenbeschränkung einhält. Dasselbe Problem kann auch bei stabilen Systemen auftreten, falls man den Anfangsregler \mathbf{k}_1 bzw. $\hat{\mathbf{a}}$ fest vorgibt. Wird der Regler allerdings mitoptimiert, existiert für ein stabiles System mindestens die Lösung $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ ($\mathbf{k}_1 = \mathbf{0}$). Die Bedingung (4.63) ist in diesem Fall immer erfüllt, wenn für die restlichen Parameter die Ungleichungen (4.59) bis (4.62) gelten, was, wie bereits erläutert, für stabile Matrizen $\hat{\mathbf{A}}_1$ unproblematisch ist.

Am Ende werden die Forderungen (4.64) bzw. (4.65) betrachtet. Sie sind, wie in Abschnitt 4.3 erläutert, hinreichend zur Sicherstellung der Ungleichung $\max_{v \in (0,1]} e'(v) \leq 0$. Ist also die parameterabhängige Ungleichung verletzt, sind die Ungleichungen (4.64) bzw. (4.65) ebenfalls nicht erfüllt. Während es für stabile Systeme unkritisch ist, die Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 so zu bestimmen, dass für alle $v \in (0,1]$ $e'(v) \leq 0$ gilt, kann dies bei bestimmten instabilen Systemen problematisch werden. Diese Systeme werden im folgenden Satz näher definiert.

Satz 4.6 *Die Systemmatrix sei in Regelungsnormalform*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

gegeben. Ist $a_{n-1} = -\sum \text{eig}(\mathbf{A}) < 0$, dann ist die Menge \mathcal{Z} der Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und $\mathbf{R}_1 \succ 0$, die die Ungleichungen $\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec 0$ und $e'(v) \leq 0, \forall v \in (0,1]$ gleichzeitig erfüllen, leer, wobei $\hat{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{b}(\hat{\mathbf{a}}^T - \mathbf{a}^T)$ und $e'(v) = -\frac{2}{u_{\max}^2} \left(\mathbf{a}^T \mathbf{D}(v) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N}^{\mathbf{D}(v)} \mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N}^{\mathbf{D}(v)} \mathbf{a} \right)$ gilt.

Beweis: Elementweise ausgeschrieben hat die symmetrische Matrix \mathbf{R}_1^{-1} folgende Gestalt:

$$\mathbf{R}_1^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{12} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1n} & r_{2n} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Die Ungleichung $\hat{\mathbf{A}}_1^T \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_1 \hat{\mathbf{A}}_1 \prec 0$ ist äquivalent zur Forderung $\mathbf{Q} = -\mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{A}}_1^T - \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{R}_1^{-1} \succ 0$. Damit die Matrix \mathbf{Q} positiv definit ist, müssen

alle Hauptdiagonalelemente positiv sein. Dies gilt auch für das Element $q_{nn} = 2(\hat{a}_0 r_{1n} + \hat{a}_1 r_{2n} + \cdots + \hat{a}_{n-1} r_{nn})$.

Berechnet man andererseits die Ableitung $e'(v \rightarrow 0)$, erhält man $e'(v \rightarrow 0) = -\frac{2}{u_{\max}^2} a_{n-1}(\hat{a}_0 r_{1n} + \hat{a}_1 r_{2n} + \cdots + \hat{a}_{n-1} r_{nn})$. Für $a_{n-1} < 0$ ist sie nur dann kleiner oder gleich null, wenn der Ausdruck $\hat{a}_0 r_{1n} + \hat{a}_1 r_{2n} + \cdots + \hat{a}_{n-1} r_{nn} = \frac{1}{2} q_{nn} \leq 0$ ist. Dies widerspricht der Forderung $q_{nn} > 0$, daher ist \mathcal{Z} leer. \square

Anschaulich bedeutet der obige Satz, dass wenn der Schwerpunkt der Eigenwerte des unregulierten Systems rechts von null liegt, kein Regler existiert, der gleichzeitig die Invarianz- und Monotoniebedingung erfüllt. Dieses Problem lässt sich durch Verkleinerung des Intervalls mildern, in dem $e'(v) \leq 0$ gilt. Anstatt des Intervalls $(0, 1]$ wird das Intervall $[v_{\min}, 1]$ betrachtet. Da die Eigenwerte, um die Verstärkung von Rauschen zu vermeiden, ohnehin nicht unendlich weit nach links verschoben werden sollten, was $v_{\min} \rightarrow 0$ bedeutet, ist diese Beschränkung beim Entwurf unproblematisch.

Bei Bedingung (4.65) kann eine Verkleinerung des Intervalls einfach realisiert werden, indem $\epsilon = v_{\min}$ gewählt wird. Bei Bedingung (4.64) dagegen ist aufgrund der Änderung der Transformationsvorschrift (4.26) eine Anpassung der Nebenbedingungen notwendig. Die neue Transformationsvorschrift ist folgendermaßen definiert:

$$v = \frac{1 + v_{\min}(\tilde{v} - 1)}{\tilde{v}}. \quad (4.75)$$

Dadurch bekommt die Ableitung $e'(v)$ folgende Gestalt:

$$e'(v) = e'\left(\frac{1}{\tilde{v}}\right) = -\frac{2}{u_{\max}^2 \tilde{v}^{2n-1} (1 + v_{\min}(\tilde{v} - 1))} p(\tilde{v}),$$

wobei

$$p(\tilde{v}) = \mathbf{a}^T \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{a} - \tilde{v}^n \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{T}(\tilde{v}) \mathbf{a} \quad \text{und}$$

$$\mathbf{T}(\tilde{v}) = \tilde{v}^n \mathbf{D} \left(\frac{1}{\tilde{v}} \right) \begin{pmatrix} (1 + v_{\min}(\tilde{v} - 1))^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (1 + v_{\min}(\tilde{v} - 1)) \end{pmatrix}.$$

Sie ist im Intervall $[v_{\min}, 1]$ negativ oder null, wenn $p(\tilde{v}) \geq 0, \forall \tilde{v} \in [1, \infty)$.

Hinreichend dafür ist, ähnlich wie in Abschnitt 4.3.1, dass die Ungleichungen

$$p^{(i)}(1) = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}^T \mathbf{P}(0, i-k, v_{\min}) \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}(0, k, v_{\min}) \mathbf{a} \\ - \hat{\mathbf{a}}^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{N} \mathbf{P}(n, i, v_{\min}) \mathbf{a} \geq 0$$

erfüllt sind. Die Matrix \mathbf{P} ist allerdings anders definiert und hängt jetzt zusätzlich von v_{\min} ab. Sie lässt sich folgenderweise berechnen:

$$\mathbf{P}(l, m, v_{\min}) = \sum_{j=0}^m v_{\min}^{m-j} \binom{m}{j} \prod_{q=0}^{m-j-1} [-q\mathbf{I} - \mathbf{N}] \prod_{q=0}^{j-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}].$$

Falls sich für die obere Grenze der Laufvariablen ein Wert kleiner als null ergibt, d. h. $m-j-1 < 0$, wird das Produkt als \mathbf{I} definiert.

Man kann also zusammenfassen, dass die Menge der zulässigen Parameter für bestimmte instabile Systeme entweder wegen der Stellgrößenbeschränkung oder wegen der Monotoniebedingung leer sein kann. Da viele technische Systeme stabil sind, tritt dieser Fall praktisch selten auf.

5 LMI-Entwurf von abschnittsweise linearen Reglern

5.1 Bisherige Entwurfsverfahren

Zum Entwurf eines Reglers mit abschnittsweise linearer Struktur existieren inzwischen mehrere Verfahren (siehe Abschnitt 2.3.1). Im Weiteren werden zwei von Kiendl [50] vorgeschlagene Verfahren betrachtet. Die Grundidee des ersten Verfahrens ist es, in k aufeinanderfolgenden Zeitpunkten t_0, t_1, \dots, t_k ein lineares Regelgesetz zu bestimmen, das für die in Zeitpunkt $t_i, i \in [0, k]$ in $\mathbf{x}(t_i)$ startende Trajektorie zulässig¹ und im Sinne eines vorgegebenen Güteintegrals möglichst günstig ist. In jedem Abtastschritt muss daher ein Optimierungsproblem gelöst werden. Dadurch ist der Rechenaufwand bei den Online-Berechnungen verhältnismäßig hoch. Aus diesem Grund wird hier näher auf die zweite Methode eingegangen, deren Funktionsprinzip bereits in Abschnitt 2.3.2 erläutert wurde.

Die Grundidee dieses Verfahrens ist es, den Zustandsraum in Gebiete einzuteilen und jedem Gebiet jeweils ein lineares Regelgesetz zuzuordnen. Der Entwurf erfolgt in drei Schritten. In dem ersten Schritt wird die Familie von Reglern $\mathbf{k}_p, p = 1, \dots, k$ festgelegt. Dafür sind zwei Möglichkeiten bekannt: entweder indirekt wie z. B. bei [93] durch eine parametrisierte Riccati-Gleichung oder direkt wie in [50] durch Festlegen der Eigenwerte z. B. $\lambda_{p+1,j} = h\lambda_{p,j}$. Die zweite Variante wird im Folgenden aufgrund der einfacheren Interpretierbarkeit der vorgegebenen Parameter bevorzugt.

Im zweiten Schritt werden die entsprechenden Ljapunov-Gebiete \mathcal{G}_p berechnet. Bei Wahl quadratischer Ljapunov-Funktionen $v_p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}$

¹Ein Regelgesetz ist bei [50] zulässig bezüglich eines Punktes $\mathbf{x}(t_i)$, wenn die in diesem Punkt startende Trajektorie in ihrem weiteren Verlauf die Stellgrößen- und Zustandsgrößenbeschränkungen nicht verletzt.

sind die Gebiete n -dimensionale Ellipsoide der Form

$$\mathcal{G}_p = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x} < c_p\}. \quad (5.1)$$

Die Matrizen \mathbf{R}_p lassen sich durch Lösen der Ljapunov-Gleichung

$$\hat{\mathbf{A}}_p^T \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_p \hat{\mathbf{A}}_p = -\mathbf{Q}_p, \quad \hat{\mathbf{A}}_p = \mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}_p^T \quad (5.2)$$

bestimmen, wobei die Matrizen \mathbf{Q}_p positiv definit sind und für das jeweilige Problem vordefiniert werden müssen. Der Skalierungsfaktor c_p wird im Weiteren so bestimmt, dass die Ellipsoide die Hyperebenen $\pm \mathbf{k}_p^T \mathbf{x} = u_{\max}$ tangieren. Dies ist stets der Fall, wenn die Gleichung

$$c_p = \frac{u_{\max}^2}{\mathbf{k}_p^T \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{k}_p} \quad (5.3)$$

erfüllt ist. Im zweiten Schritt des Reglerentwurfs ist weiterhin zu beachten, dass sich das Gebiet \mathcal{X}_0 der möglichen Anfangszustände innerhalb des Ellipsoids \mathcal{G}_1 befinden soll.

Im dritten Schritt wird die Schachtelung der Ellipsoide sichergestellt. Dabei ist die Bedingung

$$\frac{\mathbf{R}_p}{c_p} - \frac{\mathbf{R}_{p-1}}{c_{p-1}} \succ 0 \quad (5.4)$$

für alle $p = 2, \dots, k-1$ zu überprüfen. Sie stellt sicher, dass das Gebiet \mathcal{G}_p innerhalb des Gebiets \mathcal{G}_{p-1} liegt, d. h. $\mathcal{G}_p \subset \mathcal{G}_{p-1}$.

Das Entwurfsverfahren ist im Allgemeinen iterativ. Dies bedeutet, dass bei Verletzung der Schachtelungsbedingung die Matrizen \mathbf{Q}_p oder die Reglerfamilie \mathbf{k}_p neu gewählt werden müssen. Der Entwurf wird dann mit den neuen Parametern wiederholt.

5.2 Problemstellung

Der Entwurf eines Reglers mit abschnittsweise linearer Struktur mittels des im vorigen Abschnitt 5.1 vorgestellten iterativen Verfahrens setzt gewisse Erfahrung beim Festlegen der Parameter voraus. Die Wahl der Matrizen \mathbf{Q}_p z. B. ist heuristisch und hängt nur indirekt mit den Eigenschaften des Reglers zusammen. Besonders bei der Verwendung mehrerer ineinander geschachtelter Gebiete erfordert das Einhalten der Schachtelungsbedingung mehrere Iterationen.

Nachdem die Anwendung von LMIs im kontinuierlichen Fall zu einer deutlicher Vereinfachung des Entwurfs beigetragen hat, wird im Weiteren die Möglichkeit zur Übertragung der Ergebnisse auf die Regelung mit abschnittsweise linearer Struktur untersucht. Beim Vergleich der Nebenbedingungen im diskreten mit denen im kontinuierlichen Fall fällt eine große Ähnlichkeit auf. Die Unterschiede ergeben sich hauptsächlich daraus, dass die Verschiebung der Eigenwerte bei einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung festgelegt ist, während sie bei einer stückweise linearen Regelung beliebig gewählt werden kann. Die Teilregler werden bei der stückweise linearen Regelung einzeln bestimmt. Deswegen müssen mehrere voneinander abhängige konvexe Optimierungsprobleme gelöst werden. Dafür ist allerdings eine Umformung der Bedingungen (5.1) bis (5.4) notwendig, was im folgenden Abschnitt betrachtet wird.

5.3 Vereinfachung des Entwurfs

Das Ziel ist nun, den beschriebenen Reglerentwurf so weit zu vereinfachen, dass er möglichst in einem Schritt durchgeführt werden kann. Zu diesem Zweck ist die Schachtelungsbedingung a priori bei der Bestimmung der Ljapunov-Gebiete einzubeziehen. Der Entwurf soll des Weiteren das Einhalten der Stellgrößenbeschränkung garantieren und ähnlich wie bei der weichen strukturvariablen Regelung sicherstellen, dass sich das Gebiet möglicher Anfangsauslenkungen im Einzugsgebiet des geregelten Systems befindet, d. h. $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{G}_1$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit lassen sich alle Matrizen \mathbf{R}_p so skalieren, dass der Faktor c_p den Wert 1 annimmt. Diese Umskalierung führt zu einer Normierung der Ljapunov-Gebiete \mathcal{G}_p , was die Schachtelungsbedingung (5.4) deutlich vereinfacht.

Zuerst werden die beim Entwurf des Startreglers \mathbf{k}_1 einzuhaltenden Nebenbedingungen formuliert. Sie werden getrennt betrachtet, da sie sich von den Bedingungen für die restlichen Regler unterscheiden. Anstelle der Schachtelungsbedingung, die bei der Bestimmung von \mathbf{k}_1 und \mathbf{R}_1 nicht definiert ist, steht die Bedingung, dass das Gebiet möglicher Anfangsauslenkungen \mathcal{X}_0 eingeschlossen werden muss. Unter der Voraussetzung, dass die Zustandsrückführung \mathbf{k}_1 bekannt ist, lassen sich die Bedingungen (5.1) bis (5.3) als LMIs in der unbekannten Variable \mathbf{R}_1^{-1}

darstellen²:

$$\frac{\mathbf{k}_1^T \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{k}_1}{u_{\max}^2} = 1, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{A}}_1^T + \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{R}_1^{-1} \prec 0, \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{R}_1^{-1} \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.7)$$

Ist die Zustandsrückführung \mathbf{k}_1 unbekannt, wird ähnlich wie im kontinuierlichen Fall eine zusätzliche Unbekannte $\mathbf{z} = \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{k}_1$ eingeführt und die Gleichung (5.5) bekommt die Gestalt

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & \mathbf{R}_1^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (5.8)$$

Für die restlichen Teilregler $\mathbf{k}_p, p = 2, \dots, k$ wird die Bedingung (5.7) durch die Schachtelungsbedingung (5.4) ersetzt. Durch beidseitige Multiplikation der Gleichung (5.4) mit der regulären Matrix \mathbf{R}_p^{-1} und die anschließende Anwendung des Schur-Komplement-Lemmas wird diese in Abhängigkeit des unbekannten Parameters \mathbf{R}_p^{-1} dargestellt. Die Nebenbedingungen für den restlichen Regler können dann folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$\frac{\mathbf{k}_p^T \mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{k}_p}{u_{\max}^2} = 1, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{R}_p^{-1} \hat{\mathbf{A}}_p^T + \hat{\mathbf{A}}_p \mathbf{R}_p^{-1} \prec 0, \quad (5.10)$$

$$\mathbf{R}_{p-1}^{-1} - \mathbf{R}_p^{-1} \succ 0. \quad (5.11)$$

Da die Schachtelungsbedingung im Entwurf a priori berücksichtigt wird, ist bei der Bestimmung des Ljapunov-Gebiets $\mathcal{G}_p, p = 2, \dots, k$ die Kenntnis des Gebiets \mathcal{G}_{p-1} notwendig. Die Optimierung muss daher sequentiell erfolgen, d. h. zuerst werden \mathbf{k}_1 und \mathbf{R}_1 bestimmt, dann \mathbf{k}_2 und \mathbf{R}_2 usw.

Die Menge zulässiger Parameter ist nun festgelegt. Im Weiteren ist eine geeignete konvexe Gütefunktion zu wählen. Die in Abschnitt 4.5

²An dieser Stelle ist zu beachten, dass der LMI-Solver LMILAB aus der Robust Control Toolbox von Matlab alle Nebenbedingungen in der Form von Ungleichungen erwartet. Die obige Eingabe führt dabei zum Ergebnis: „nicht zulässig“, sogar wenn die Menge zulässiger Parameter nicht leer ist. Daher sind hier unbedingt andere Solver wie z. B. SDPT3 oder Sedumi zu benutzen, die auch mit Gleichungen als Nebenbedingungen umgehen können.

beschriebenen Gütefunktionen können hier direkt auf den diskreten Fall übertragen werden. Ein quadratisches Gütemaß ist allerdings wegen des hohen Entwurfsaufwands bei der Wahl einer Gewichtungsmatrix $\mathbf{\hat{G}}$ für jeden Teilregler nicht zu empfehlen. Da die Regelung mit abschnittsweise linearer Struktur umso besser ist, je früher auf einen schnelleren Regler umgeschaltet wird, ist das Volumen der Ljapunov-Gebiete $\mathcal{G}_p, p = 2, \dots, k$ eine sinnvolle Gütefunktion. Bei dieser Wahl ist allerdings zu klären, wie die entsprechenden Zustandsrückführungen \mathbf{k}_p zu wählen sind.

Handelt es sich um wenige Teilregler niedriger Dimensionen, können sie einzeln vorgegeben werden. Bei der Wahl der Eigenwerte der Teilsysteme können die Regeln aus der linearen Systemtheorie verwendet werden. Zusätzlich ist allerdings zu beachten, dass große Sprünge im Real- und Imaginärteil zu großen Sprüngen im Stellgrößenverlauf führen, wenn zwischen zwei Teilreglern umgeschaltet wird.

Bei mehreren Teilreglern ist diese Herangehensweise aufgrund der großen Anzahl von unbekannten Parametern sehr mühsam. Eine mögliche Vorgehensweise zur Lösung des Problems ist in [3] vorgestellt. Vorgegeben wird nur der Startregler \mathbf{k}_1 , und die Eigenwerte der restlichen Systeme werden diesbezüglich auf Strahlen durch den Koordinatenursprung nach links verschoben (siehe Abb. 4.1). Die Idee lässt sich verallgemeinern, indem man die Eigenwerte nicht auf Strahlen, sondern auf einer beliebig vorgebbaren Kurve verschiebt. Die Wahl solcher Kurven wird in Abschnitt 5.4 untersucht.

Hier bleibt nun zu klären, wie der Startregler bestimmt wird. Verwendet man hierfür analog zu den restlichen Reglern das Volumen des Ljapunov-Gebiets als Gütefunktion, sind oft einige Iterationen notwendig, um eine Polkonfiguration zu finden, für welche die Stellgröße möglichst gut ausnutzt wird und alle Nebenbedingungen (5.5) bis (5.7) erfüllt werden. Da das Volumen des Ljapunov-Gebiets \mathcal{G}_1 im Unterschied zu den Volumina der restlichen Gebiete $\mathcal{G}_p, p = 2, \dots, k$ nicht maßgeblich für die Güte der Regelung ist, lassen sich diese Iterationen durch die Wahl einer anderen Gütefunktion vermeiden. Wird z. B. die Abklingrate des Anfangssystems als Optimierungskriterium verwendet, kann man den Regler \mathbf{k}_1 und die Matrix \mathbf{R}_1 gleichzeitig bestimmen. Der Entwurf der stückweise linearen Regelung kann dann in einem Schritt erfolgen. Es sind nur die Anzahl der Regler und die Eigenwertverteilung festzulegen. Auch hier ist jedoch zu beachten, dass bei der Optimierung nicht die tatsächliche Abklingrate, sondern eine untere Grenze davon maximiert wird (siehe Abschnitt 4.5.2). Wie groß dieser Abstand ist, hängt

von den konkreten Nebenbedingungen ab. Können mit dieser Methode keine zufriedenstellenden Ergebnisse erreicht werden, ist es hilfreich, den Startregler \mathbf{k}_1 vorzugeben und nur die Matrix \mathbf{R}_1 zu optimieren. In diesem Fall sind allerdings einige Iterationen nötig, um eine geeignete Kombination der Parameter \mathbf{k}_1 und \mathbf{R}_1 zu finden.

5.4 Verteilung der Eigenwerte

Die Güte der Regelung mit abschnittsweise linearer Struktur hängt stark mit der Verteilung der Eigenwerte der Teilsysteme zusammen. Diese Verteilung wird bei dem hier vorgeschlagenen Entwurfsverfahren durch eine von $\hat{\mathbf{A}}_1$ und p abhängige, nichtlineare Funktion festgelegt. Daher wird nun genauer auf die Definition dieser Funktion eingegangen bzw. auf die Frage, welche Wahl sinnvoll ist und wie sie die Eigenschaften der Regelung beeinflusst.

Definiert man die Verschiebung der Eigenwerte in der komplexen Ebene für $p = 1, \dots, k$ durch die allgemeine Vorschrift

$$\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_p) = f_{\Re}(p) \cdot \Re(\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_1)) + f_{\Im}(p) \cdot \Im(\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_1)), \quad (5.12)$$

reduziert sich die Wahl der nichtlinearen Funktion auf die Wahl der Funktionen $f_{\Re}(p)$, $f_{\Im}(p)$. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass sie die Definition einer beliebigen Verteilung in der komplexen Ebene ermöglicht und dass der Verlauf des Real- von dem des Imaginärteils entkoppelt ist. Damit die Eigenwerte, wie z. B. in [3], auf Strahlen durch den Ursprung wandern, ist $f_{\Re}(p) = f_{\Im}(p)$ zu setzen. Außerdem lässt sich der Einfluss der Funktionen $f_{\Re}(p)$, $f_{\Im}(p)$ gut visualisieren und interpretieren, was das Festlegen folgender Regeln ermöglicht:

- Eine lineare Regelung wird durch Verschiebung der Eigenwerte nach links beschleunigt. Damit die linearen Teilregler mit steigendem p schneller werden, ist für $f_{\Re}(p)$ eine streng monoton steigende Funktion zu wählen.
- Ein Vorzeichenwechsel der Imaginärteile ist physikalisch nicht sinnvoll, daher ist $f_{\Im}(p) \geq 0$ zu wählen. Bei stark schwingungsfähigem Anfangssystem $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}_1 \mathbf{x}$ ist es erfahrungsgemäß günstig, $f_{\Im}(p)$ monoton fallend zu wählen.
- Die Verschiebung startet in den Eigenwerten der Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$, daher ist $f_{\Re}(1) = f_{\Im}(1) = 1$.

- Starke Unterschiede in den Eigenwerten zweier aufeinander folgender Teilsysteme sind zu vermeiden, da sie zu großen Sprüngen im Stellgrößenverlauf führen.
- Mit steigender Anzahl der Regler verbessert sich die Regelgüte. Da eine zu dichte Schachtelung der Gebiete zu numerischen Schwierigkeiten bei der Optimierung führt, sollte die Anzahl der Regler nicht zu groß gewählt werden.

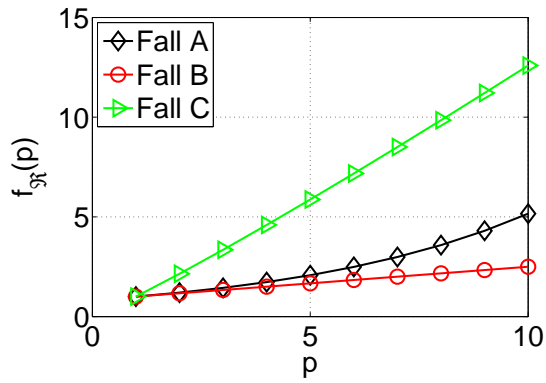
Die Wahl von $f_{\mathcal{R}}(p)$ und $f_{\mathcal{S}}(p)$ wird nun beispielhaft an dem zweidimensionalen System aus [93] erläutert, wo ein einfaches Pendel geregelt wird. Die Beobachtungen lassen sich aber auch auf höherdimensionale Systeme übertragen (siehe z. B. Abschnitt 6.2). Das Modell des Pendels ist als

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (5.13)$$

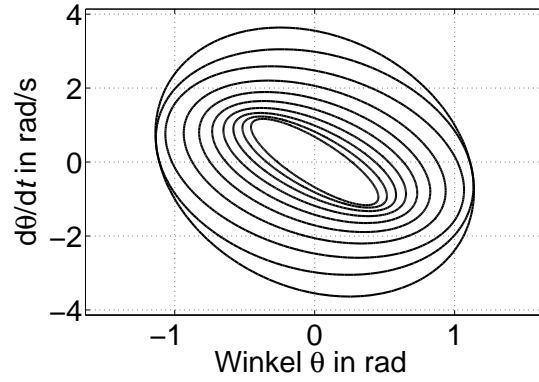
gegeben, wobei der Auslenkungswinkel mit θ und die Winkelgeschwindigkeit mit $\dot{\theta}$ bezeichnet werden. Die Stellgröße ist auf $|u| \leq 5$ Nm beschränkt. Die Anfangsauslenkungen dürfen innerhalb des Einheitsquaders liegen, d. h. $|\theta| \leq 1$, $|\dot{\theta}| \leq 1$. Die Eigenwerte der Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$ liegen bei $\lambda_{1,2} = -0,6939 \pm 3,1215i$.

Zuerst wird eine geeignete Funktion $f_{\mathcal{R}}(p)$ gesucht. Der Imaginärteil bleibt dabei konstant, d. h. $f_{\mathcal{S}}(p) = 1, \forall p$. Die Anzahl der Regler wird auf 10 gesetzt, d. h. $p = 1, \dots, 10$. In Abb. 5.1 sind verschiedene monoton steigende Funktionen und die zugehörigen geschachtelten Gebiete dargestellt. Die Verläufe des Winkels, der Winkelgeschwindigkeit und der Stellgröße für eine Initialauslenkung $[\theta, \dot{\theta}]^T = [54^\circ, 20^\circ s^{-1}]^T$ sind in Abb. 5.2 zu sehen.

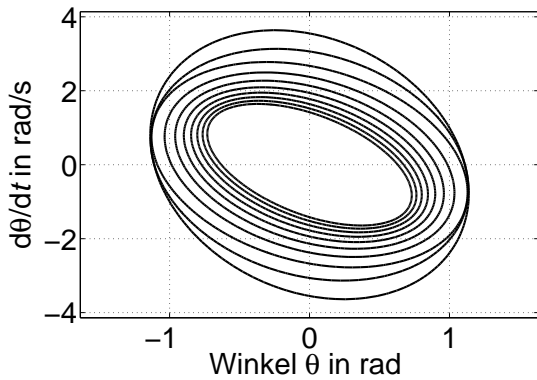
Die Wahl von $f_{\mathcal{R}}(p)$ hat anscheinend großen Einfluss auf die Schachtelung der Gebiete und damit auch auf die Regelgüte und die Sprünge im Stellgrößenverlauf. Je stärker $f_{\mathcal{R}}(p)$ mit steigendem p zunimmt, desto größer werden die Sprünge und desto schneller ziehen sich die Ellipsen zusammen. Dies ist in Abb. 5.1(d) besonders deutlich zu erkennen. Die im Vergleich zu den anderen zwei Fällen stärkere Zunahme des Realteils beim Umschalten zwischen \mathbf{k}_1 und \mathbf{k}_2 führt dazu, dass das Gebiet \mathcal{G}_2 im Fall C deutlich kleiner ist als die Gebiete \mathcal{G}_2 in Fall A und B. Dies ist ungünstig, da bei größeren Auslenkungen erst relativ spät auf einen schnelleren Regler umgeschaltet wird. Die Folgen davon sind in Abb. 5.2 sichtbar. Das Überschwingen der Zustandsgrößen ist in Fall C stärker und es dauert länger, bis die gewünschte Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ erreicht wird.



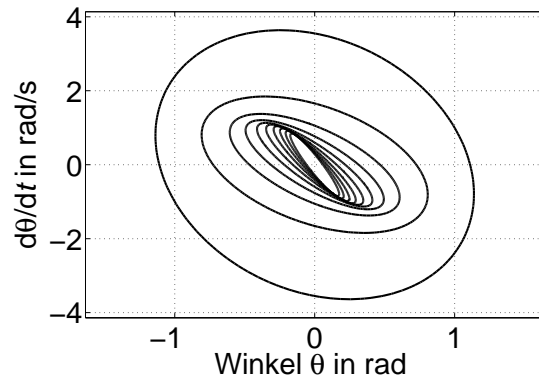
(a) Beispielverläufe der Funktion $f_{\mathcal{R}}(p)$



(b) Fall A: $f_{\mathcal{R}}(p) = 1.2^{(p-1)}$



(c) Fall B: $f_{\mathcal{R}}(p) = 1 + \frac{(p-1)}{6}$



(d) Fall C: $f_{\mathcal{R}}(p) = p^{1.1}$

Abbildung 5.1: Schachtelung der Gebiete in Abhängigkeit der Funktion $f_{\mathcal{R}}(p)$, $p = 1, \dots, 10$.

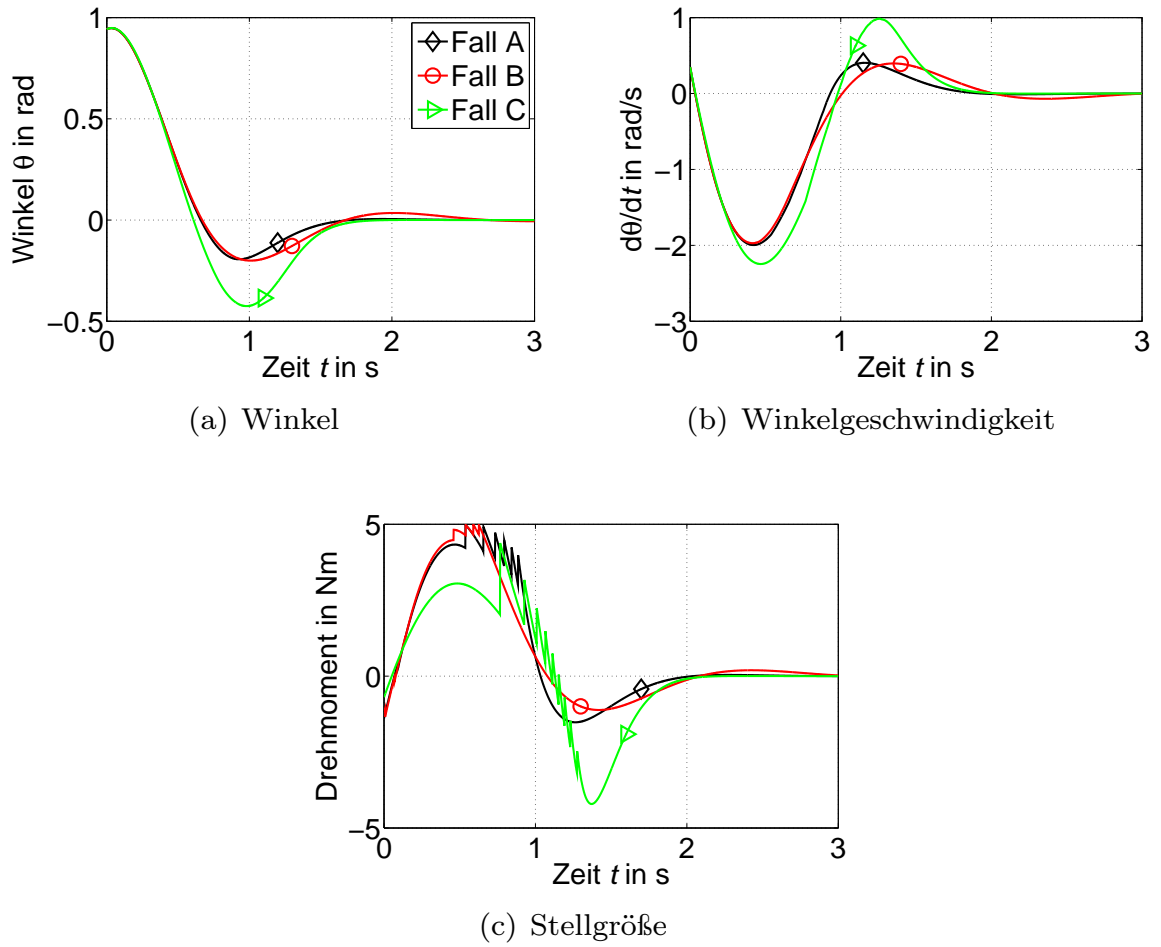


Abbildung 5.2: Verlauf der Zustandsgrößen in Abhängigkeit vom gewählten Regelgesetz bei einer Anfangsauslenkung von $[\theta, \dot{\theta}]^T = [54^\circ, 20^\circ s^{-1}]^T$, Fall A: $f_{\mathcal{R}}(p) = 1.2^{(p-1)}$, Fall B: $f_{\mathcal{R}}(p) = 1 + \frac{(p-1)}{6}$, Fall C: $f_{\mathcal{R}}(p) = p^{1.1}$.

Deutlich bessere Ergebnisse werden im Fall B erzielt. Die Ausnutzung der Stellgröße für kleine Auslenkungen lässt sich allerdings weiter optimieren, wie aus Abb. 5.1(c) deutlich wird. Eine Möglichkeit wäre, die Anzahl der Regler zu erhöhen. Eine weitere Idee liefert die Beobachtung, dass mit steigendem p das Verhältnis $\frac{f_{\Re}(p+1)}{f_{\Re}(p)}$ und daher auch das Verhältnis der Realteile der Eigenwerte abnimmt. Dies bedeutet, dass die beim Umschalten zwischen zwei Teilreglern erreichte prozentuale Verschiebung des Realteils bezogen auf den vorherigen Teilregler nicht konstant ist und mit steigendem p abnimmt.

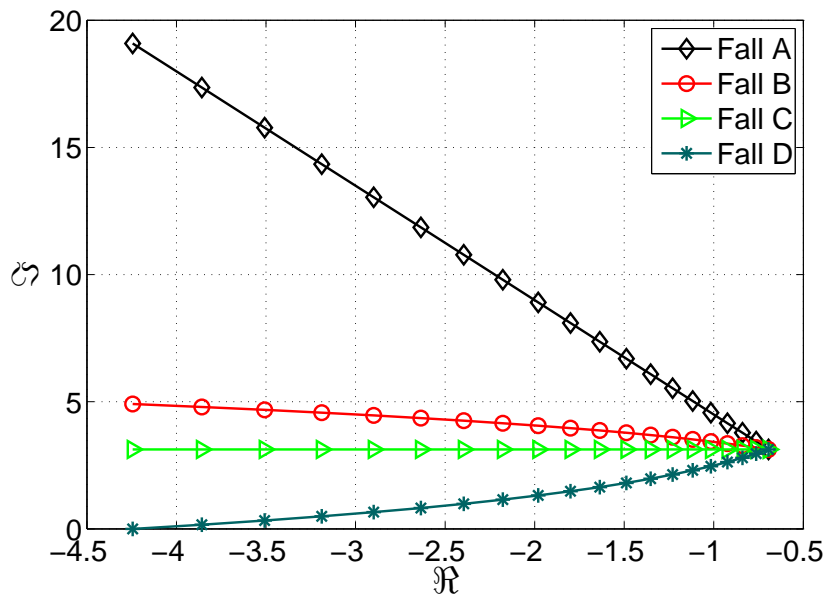
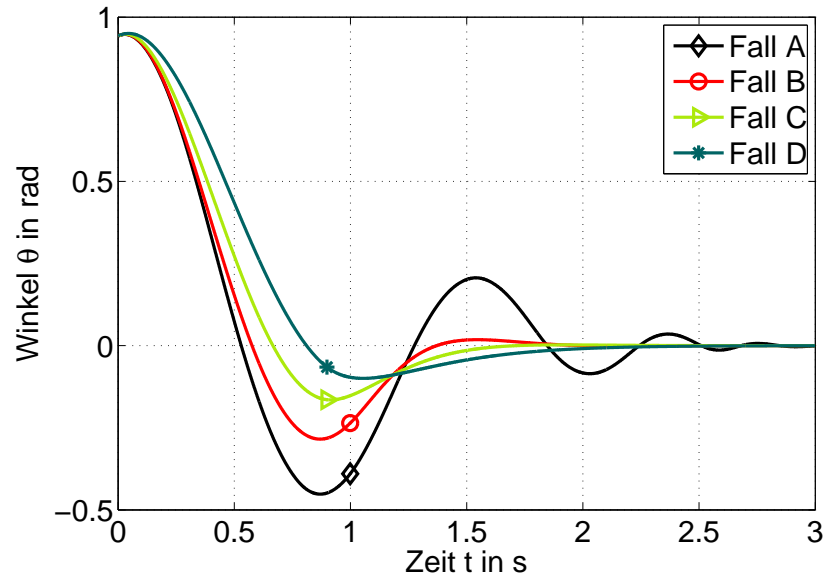


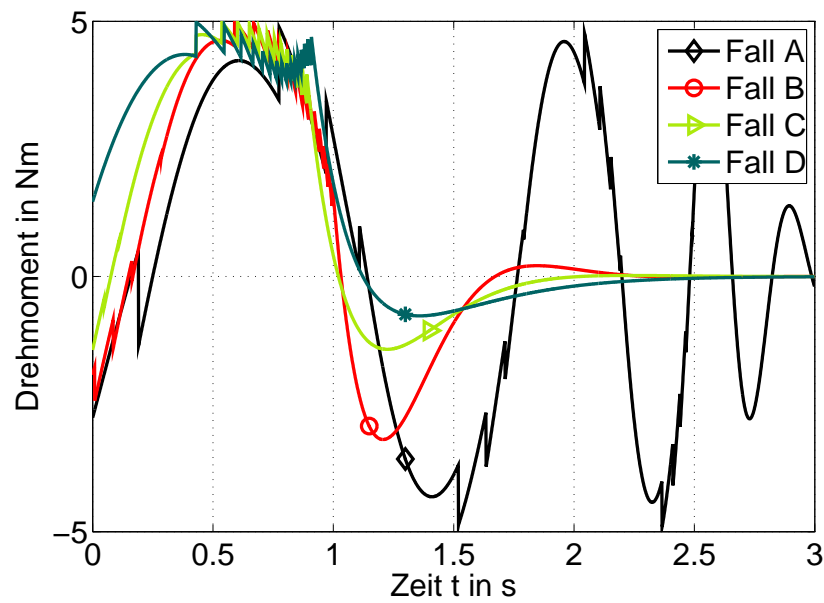
Abbildung 5.3: Verschiebung der Eigenwerte in Abhängigkeit von $f_{\mathcal{S}}(p)$, Fall A: $f_{\mathcal{S}}(p) = 1.1^{(p-1)}$, Fall B: $f_{\mathcal{S}}(p) = 1.1^{((p-1)/4)}$, Fall C: $f_{\mathcal{S}}(p) = 1$, Fall D: $f_{\mathcal{S}}(p) = 1 - (p - 1)/19$; $f_{\Re}(p) = 1.1^{(p-1)}$, $p = 1, \dots, 20$, wobei $f_{\Re} = 1.1^{p-1}$.

Eine konstante prozentuale Verschiebung lässt sich wie in Fall A mittels einer Exponentialfunktion erreichen. Damit werden bei unserem Beispielsystem die besten Ausregelzeiten erzielt. Durch die gleichmäßige Verteilung der geschachtelten Gebiete ist eine gute Stellgrößenausnutzung für alle möglichen Anfangszustände sichergestellt. Da die Ellipsen nicht so dicht wie in Fall B geschachtelt werden, sind die Sprünge im Stellgrößenverlauf allerdings größer. Sie können aber durch eine Verminderung der Basis der Exponentialfunktion und Erhöhung der Regleranzahl deutlich reduziert werden (siehe z. B. Abb. 5.5(d)).

Bisher wurden die Eigenwerte so verschoben, dass der Imaginärteil un-



(a) Winkler



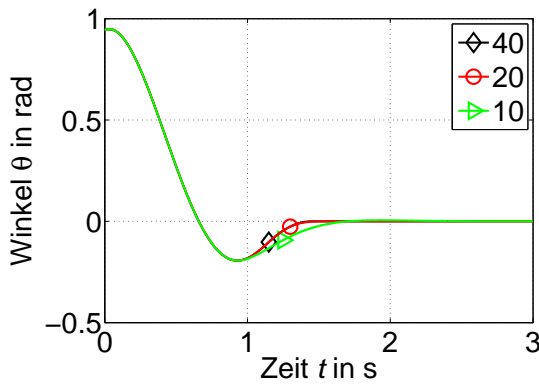
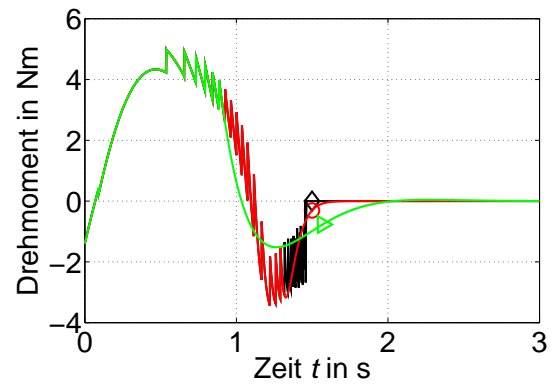
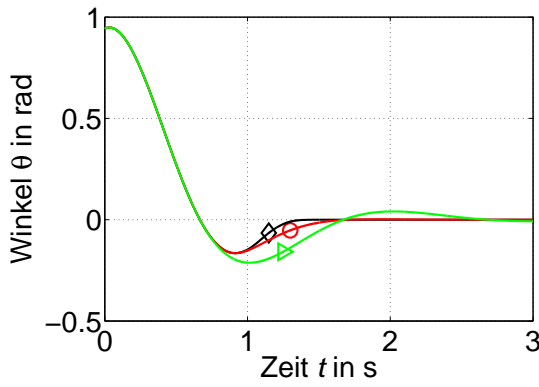
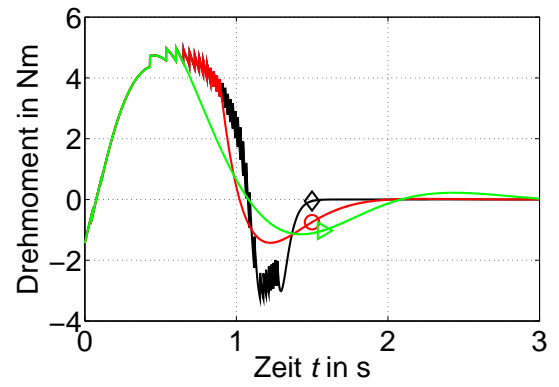
(b) Stellgröße

Abbildung 5.4: Verläufe des Winkels θ und der Stellgröße in Abhängigkeit von $f_{\mathfrak{S}}(p)$, Fall A: $f_{\mathfrak{S}}(p) = 1.1^{(p-1)}$, Fall B: $f_{\mathfrak{S}}(p) = 1.1^{((p-1)/4)}$, Fall C: $f_{\mathfrak{S}}(p) = 1$, Fall D: $f_{\mathfrak{S}}(p) = 1 - (p-1)/19$; $f_{\mathfrak{R}}(p) = 1.1^{(p-1)}$, $p = 1, \dots, 20$.

verändert blieb ($f_{\Im}(p) = 1$). Nun soll der Einfluss der Funktion $f_{\Im}(p)$ auf den Stell- und Zustandsgrößenverlauf untersucht werden. In Abb. 5.3 werden vier mögliche Eigenwertverteilungen mit $f_{\Im}(p)$ als veränderlichem Parameter präsentiert. Der Realteil der Eigenwerte wird in allen vier Fällen mit $f_{\Re}(p) = 1.1^{(p-1)}$, $p = 1, \dots, 20$ skaliert. In Fall A werden die Eigenwerte nach links verschoben, wobei das Verhältnis zwischen Real- und Imaginärteil konstant bleibt, d. h. der Imaginärteil nimmt in demselben Verhältnis wie der Realteil zu. Besitzen die Eigenwerte der Matrix $\hat{\mathbf{A}}_1$ einen hohen Imaginäranteil, führt dies wie in unserem Fall zu unerwünschten Schwingungen in den Stell- und Zustandsgrößen (siehe Abb. 5.4). In dem umgekehrten Fall D wird der Imaginärteil kontinuierlich auf 0 reduziert. Im Vergleich zu den Fällen B und C dauert es allerdings länger, bis die gewünschte Ruhelage erreicht wird. Je nach zugelassenem Überschwingen ist es für dieses Beispielsystem am günstigsten, die Eigenwerte so zu verschieben, dass Imaginäranteil konstant bleibt oder leicht zunimmt.

Im Allgemeinen lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Ausregelzeit und dem Imaginärteil der Eigenwerte der einzelnen Teilsysteme beobachten. Ein höherer Imaginärteil beschleunigt das Erreichen der Ruhelage, verstärkt allerdings das Überschwingen. Da die Eigenwerte der Teilsysteme in unserem Fall eine Funktion der Eigenwerte des ersten Teilsystems sind, ist es oft sinnvoll, dessen Verhalten zu betrachten. Ist das System stark schwingungsfähig, ist $f_{\Im}(p)$ monoton fallend oder konstant zu wählen. Ist das System gut gedämpft, sollte für $f_{\Im}(p)$ eher eine monoton steigende Funktion bevorzugt werden.

Da beide Funktionen $f_{\Re}(p)$ und $f_{\Im}(p)$ von p abhängen, ist die maximale Anzahl von Reglern ebenfalls ein Parameter, der die Güte der Regelung bestimmt. Dessen Einfluss wird in Abb. 5.5 veranschaulicht. Dabei wird der Imaginärteil konstant gehalten und der Realteil mittels einer Exponentialfunktion skaliert. Wird die Anzahl der Regler vergrößert, wird die Stellgröße in den Bereichen um den Ursprung besser ausgenutzt, und die Ruhelage wird schneller erreicht (siehe Abb. 5.5(a), 5.5(c)). Da dabei die Ellipsen um den Ursprung immer kleiner werden, wird ab einer bestimmten Anzahl von Reglern keine relevante Beschleunigung beobachtet. Wann dieser Punkt erreicht wird, hängt vom Verhalten der Funktion $f_{\Re}(p)$ und der Kondition von \mathbf{R}_1 ab. Nimmt die Funktion schnell zu und ist die Matrix \mathbf{R}_1 schlecht konditioniert, wird dieser Punkt früher erreicht. Eine Verbesserung ist dann nur durch Änderungen in $f_{\Re}(p)$ und $f_{\Im}(p)$ zu erreichen.


(a) Winkel mit $f_{\mathcal{R}}(p) = 1.2^{(p-1)}$

(b) Stellgröße mit $f_{\mathcal{R}}(p) = 1.2^{(p-1)}$

(c) Winkel mit $f_{\mathcal{R}}(p) = 1.1^{(p-1)}$

(d) Stellgröße mit $f_{\mathcal{R}}(p) = 1.1^{(p-1)}$
Abbildung 5.5: Variation der Anzahl von Reglern, $f_{\mathcal{S}}(p) = 1$.

5.5 Glättung des Stellgrößenverlaufs mittels Interpolation

Der Hauptnachteil aller Regelungen mit stückweise linearer Struktur ist der unstetige Stellgrößenverlauf. Dieser wird in [93] durch eine Interpolation zwischen den Teilreglern vermieden. Für den durch Interpolation konstruierten Regler sind allerdings zwei Fragen zu klären. An erster Stelle muss natürlich die Stabilität des geregelten Systems sichergestellt werden. Des Weiteren ist das Einhalten der Stellgrößenbeschränkungen zu garantieren. Beides wird bei [93] durch Verkleinerung der einzelnen Einzugsgebiete erreicht. Die Ausregelzeiten sind daher schlechter als in dem Fall ohne Interpolation, da die Umschaltung auf einen schnelleren Regler später erfolgt.

Wird die Stabilität des gesättigten Systems sichergestellt, bringt es keine Nachteile, die Regelung im gesättigten Bereich zu betreiben. Dies führt sogar, wie z. B. in [18] gezeigt, zu einer weiteren Verbesserung der Regelgüte. Daher wird hier eine vorübergehende Verletzung der Stellgrößenbeschränkung zugelassen und nur die Stabilität des geregelten Systems betrachtet. Sie wird durch Erweiterung des Entwurfs um eine zusätzliche Nebenbedingung garantiert. Zu den Nebenbedingungen (5.5) bis (5.7) bzw. (5.9) bis (5.11) tritt dadurch die weitere Forderung

$$\mathbf{R}_p^{-1} \hat{\mathbf{A}}_{p+1}^T + \hat{\mathbf{A}}_{p+1} \mathbf{R}_p^{-1} \prec 0 \quad (5.14)$$

für alle $p = 1, \dots, k-1$. Zu zeigen ist nun, dass unter diesen Nebenbedingungen das nach der Vorschrift

$$u = \begin{cases} -\text{sat}\left(\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_{p+1} \mathbf{x} - 1}{\mathbf{x}^T (\mathbf{R}_{p+1} - \mathbf{R}_p) \mathbf{x}} \mathbf{k}_p^T \mathbf{x} + \frac{1 - \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T (\mathbf{R}_{p+1} - \mathbf{R}_p) \mathbf{x}} \mathbf{k}_{p+1}^T \mathbf{x}\right) & \text{für } p < k \\ -\mathbf{k}_k^T \mathbf{x} & \text{für } p = k \end{cases} \quad (5.15)$$

geregelte System stabil ist. Die Vorschrift definiert eine lineare Interpolation zwischen den einzelnen Teilreglern. Für $p < k$ lässt sich in Anlehnung an [42] folgender Satz beweisen:

Satz 5.1 *Gegeben sei ein Ellipsoid $\mathcal{E}_{p+1}(\mathbf{R}_{p+1}, 1) \subset \mathcal{E}_p(\mathbf{R}_p, 1)$, so dass*

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}_{p+1}^T)^T \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_p (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}_{p+1}^T) \prec 0, \quad (5.16)$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}_p^T)^T \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_p (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{k}_p^T) \prec 0, \quad (5.17)$$

$$|\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}| \leq u_{\max} \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_p(\mathbf{R}_p, 1) \quad (5.18)$$

und ein Regelgesetz

$$u_p = \begin{cases} -\text{sat}\left(\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_{p+1} \mathbf{x} - 1}{\mathbf{x}^T (\mathbf{R}_{p+1} - \mathbf{R}_p) \mathbf{x}} \mathbf{k}_p^T \mathbf{x} + \frac{1 - \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T (\mathbf{R}_{p+1} - \mathbf{R}_p) \mathbf{x}} \mathbf{k}_{p+1}^T \mathbf{x}\right), & \mathbf{x} \in \mathcal{E}_p \setminus \mathcal{E}_{p+1}, \\ -\mathbf{k}_{p+1}^T \mathbf{x}, & \mathbf{x} \in \mathcal{E}_{p+1}. \end{cases}$$

Die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des mittels u_p geregelten dynamischen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_p$ ist asymptotisch stabil für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_p$.

Beweis: Für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_{p+1}$ ist $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}$ eine Ljapunov-Funktion des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_p$. Da $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_{p+1}^T)^T \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_p (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_{p+1}^T) \prec 0$ gilt, ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil innerhalb \mathcal{E}_{p+1} .

Bei $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_p \setminus \mathcal{E}_{p+1}$ erhält man die Ableitung

$$\dot{v}(\mathbf{x}) = [\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \text{sat}(f(\mathbf{x}))]^T \mathbf{R}_p \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p [\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \text{sat}(f(\mathbf{x}))]$$

mit $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_{p+1} \mathbf{x} - 1}{\mathbf{x}^T (\mathbf{R}_{p+1} - \mathbf{R}_p) \mathbf{x}} \mathbf{k}_p^T \mathbf{x} + \frac{1 - \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T (\mathbf{R}_{p+1} - \mathbf{R}_p) \mathbf{x}} \mathbf{k}_{p+1}^T \mathbf{x}$. Aus Gl. (5.18) folgt, dass $\text{sat}(f(\mathbf{x})) \in \text{conv}\{\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}, f(\mathbf{x})\}$. Da $f(\mathbf{x}) \in \text{conv}\{\mathbf{k}_p^T \mathbf{x}, \mathbf{k}_{p+1}^T \mathbf{x}\}$ ist, lässt sich $\text{sat}(f(\mathbf{x}))$ als $\text{sat}(f(\mathbf{x})) \in \text{conv}\{\mathbf{k}_{p+1}^T \mathbf{x}, \mathbf{k}_p^T \mathbf{x}\}$ darstellen. Daher ist $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \text{sat}(f(\mathbf{x})) \leq \max\{\mathbf{x}^T \mathbf{R}_p (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_p^T) \mathbf{x}, \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}_{p+1}^T) \mathbf{x}\}$. Aus den Bedingungen (5.16) und (5.17) folgt nun, dass $\dot{v}(\mathbf{x}) < 0 \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}_p \setminus \mathcal{E}_{p+1}$. Damit ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ des Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u_p$ asymptotisch stabil für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_p$. \square

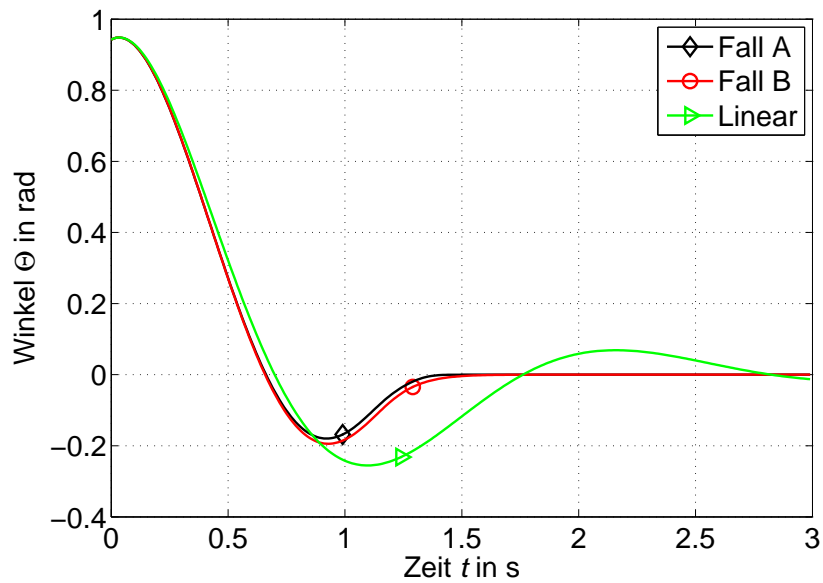
Aufgrund des Satzes 5.1 lässt sich für das nach der Vorschrift (5.15) geregelte System eine stückweise stetige Ljapunov-Funktion $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{R}_p \mathbf{x}$ mit $p = 1, \dots, k-1$ definieren. Da die Ellipsoide $\mathcal{E}_{k-1} \subset \dots \subset \mathcal{E}_1$ ineinander geschachtelt sind und die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ beinhalten, ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage des Systems.

Betrachten wir nun erneut das Pendelbeispiel aus Abschnitt 5.4. In Abb. 5.6 sind die Verläufe des Winkels und der Stellgröße bei einer Verschiebung der Eigenwerte gemäß der Vorschrift

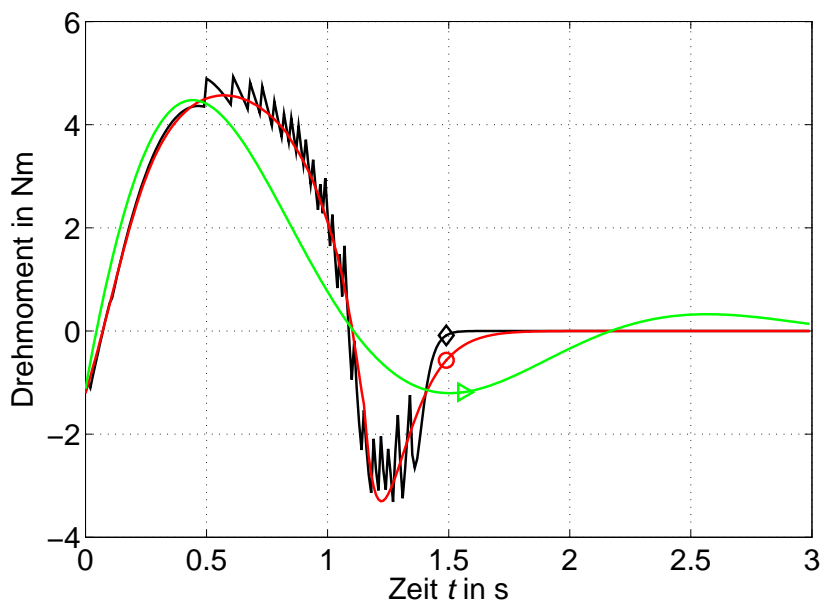
$$\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_p) = 1,1^{(p-1)} \cdot \Re(\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_1)) + \Im(\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_1)), p = 1, \dots, 30$$

gezeigt. In Fall A wird zwischen den Reglern sprunghaft geschaltet und in Fall B linear interpoliert. Zum Vergleich wird der lineare Regler dargestellt, der das quadratische Gütemaß

$$\int_0^\infty \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + 0,18u^2$$



(a) Winkeln



(b) Stellgröße

Abbildung 5.6: Vergleich der Winkel- und Stellgrößenverläufe bei sprunghaftem (Fall A) oder kontinuierlichem (Fall B) Wechsel zwischen mehreren Reglern. Als Referenz werden die mittels eines guten linearen Reglers erzielten Verläufe dargestellt.

minimiert. Dabei wird die Stellgröße u so gewichtet, dass die Stellgrößenbeschränkung $|u| \leq 5$ gerade noch eingehalten wird.

Die beiden nichtlinearen Regler schneiden erwartungsgemäß deutlich besser als der lineare ab, wobei sie fast identische Winkelverläufe aufweisen. Ein kleiner Unterschied entsteht allerdings durch die neue Nebenbedingung (5.14), die die Menge der zulässigen Matrizen \mathbf{R}_p bei einer Interpolation zwischen den Teilreglern zusätzlich begrenzt. Die Interpolation hat allerdings den Vorteil, dass keine Sprünge im Stellgrößenverlauf auftreten. Der Verlauf des Drehmoments in Fall B (Abb. 5.6(b)) ist deutlich schonender für das Stellglied als in Fall A.

6 Anwendungsbeispiele

Im Folgenden soll anhand einiger Beispiele das Verhalten der in Kap. 4 und Kap. 5 vorgestellten Verfahren zum Reglerentwurf untersucht werden. Dabei wird mit jedem weiteren Beispiel ein anderer Aspekt der Verfahren veanschaulicht. Im Abschnitt 6.1 liegt der Schwerpunkt auf der impliziten weichen strukturvariablen Regelung. Für deren Entwurf werden verschiedene Gütemaße und Optimierungsmethoden verwendet und miteinander bezüglich Regelgüte und Entwurfsaufwand verglichen. Wann der Einsatz einer stückweise linearen Regelung sinnvoll ist, wird im Abschnitt 6.2 erläutert. Im Abschnitt 6.3 wird das Verhalten der strukturvariablen Regelungen in einem Gebiet um den Ursprung untersucht. Dabei werden die Ausregelzeiten nicht nur für eine maximale Anfangsauslenkung ermittelt, sondern für einen ganzen Bereich von Anfangsauslenkungen.

In allen Beispielen wird zum Vergleich eine zeitoptimale Steuerung betrachtet. Dadurch erhält man eine untere Grenze für die Schnelligkeit der Regelung. Zusätzlich wird eine lineare Regelung entworfen, die eine Standardlösung mit sehr geringem Entwurfsaufwand repräsentiert. Alle Entwurfsergebnisse sind im Anhang A.5 zusammengefasst.

6.1 Hydraulischer Aktor

In diesem Abschnitt ist der Einfluss des Gütemaßes beim Entwurf einer Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen für den hydraulischen Aktor aus [4, 94] zu untersuchen. Dabei werden verschiedene Gütemaße in Bezug auf die Zeit verglichen, die nach einer Anfangsauslenkung zum Erreichen des 5%-Toleranzbands benötigt wird.

Der Aufbau des Aktors, dessen Werkzeugposition s geregelt werden soll, ist in Abb. 6.1 skizziert. Die Eingangsspannung u ist in diesem Fall die Stellgröße, durch die der Druck p_1 eingestellt wird. Bei einer Differenz zwischen dem eingestellten Druck p_1 und dem Druck im Zylinderkolben p_2 entsteht ein Volumenstrom \dot{q} . Dadurch entsteht auf den Kolben eine Kraft, die zu einer Bewegung des Werkzeugs führt.

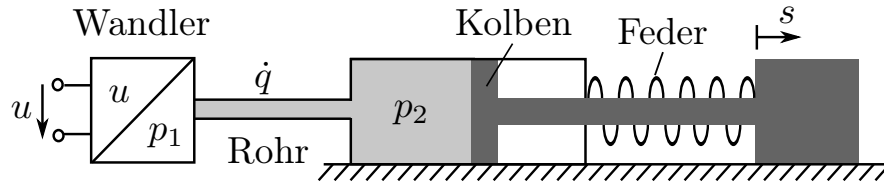


Abbildung 6.1: Aufbau des hydraulischen Aktors.

Das abgebildete System lässt sich im Zustandsraum folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -1,167 & 25 \\ 0 & 0 & -0,8 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,4 \end{bmatrix} u, \\ y &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

Der Zustandsvektor ist als $\mathbf{x} = [s \quad \dot{s} \quad p_1]^T$ definiert und die Stellgröße liegt im Bereich

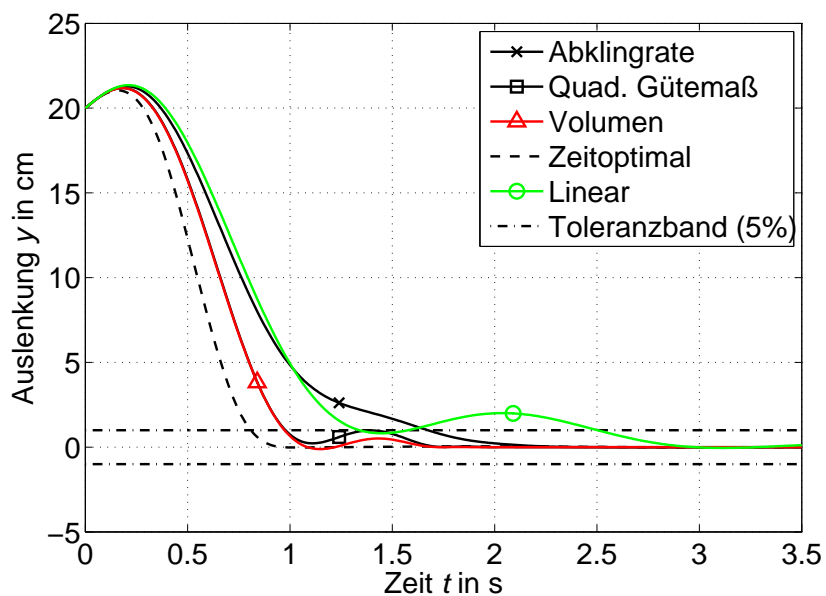
$$|u| \leq u_{\max} = 10,5\text{V}.$$

Die Menge

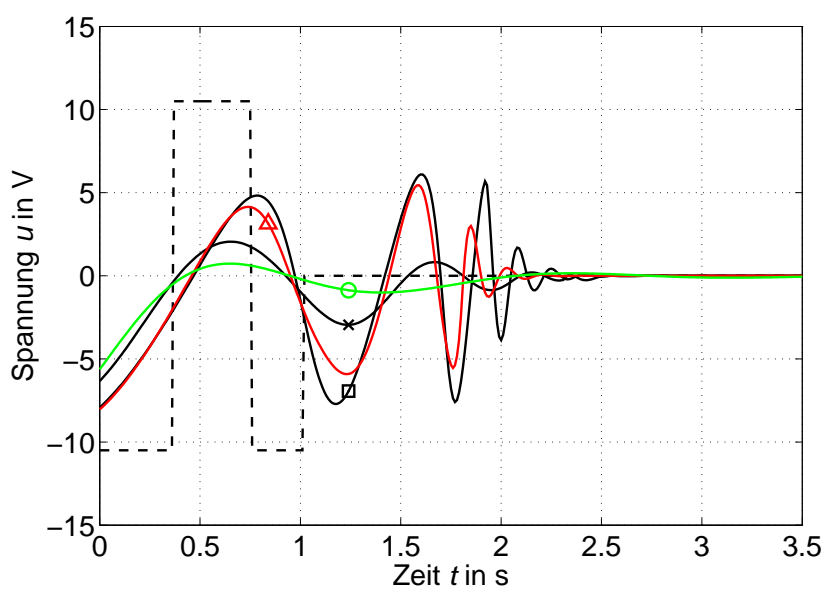
$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \mid |s| \leq 20 \text{ cm}, |\dot{s}| \leq 10 \text{ cms}^{-1}, |p_1| \leq 10 \text{ Pa}\}$$

enthält alle möglichen Anfangsauslenkungen \mathbf{x} . Die Systemmatrix \mathbf{A} besitzt einen reellen Eigenwert $\lambda_1 = -0,8$ und ein schwach gedämpftes konjugiert komplexes Eigenwertpaar $\lambda_{2,3} = -0,584 \pm 3,108i$.

Beim Entwurf einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung sind die Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 festzulegen. Dies geschieht bei dem in dieser Arbeit vorgeschlagenen Verfahren durch das Lösen eines konvexen Optimierungsproblems. Die zulässige Menge für das in Regelungsnormalform transformierte System wird durch die Ungleichungen (4.59) bis (4.64) definiert. Da die Ausregelzeit des nichtlinearen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}(v)\mathbf{x}$ nicht analytisch zu bestimmen ist, werden bei der Optimierung die Gütekriterien aus Abschnitt 4.5 verwendet. Die erzielten Verläufe und Ausregelzeiten $T_{5\%}$ werden in Abb. 6.2 für die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 10 \ 10]^T$ aufgezeigt. Zum Vergleich dient der lineare Regler $\mathbf{k}_{\text{lin}} = [-0,0833 \ 0,0828 \ 0,76068]^T$. Dieser ist mit Hilfe einer Evolutionsstrategie ermittelt worden und ist der schnellste, der sich beim Einhalten der Stellgrößenbeschränkungen für das Gebiet von Anfangsauslenkungen \mathcal{X}_0 ergibt. Als Gütemaß für die evolutionäre Optimierung



(a) Positionsverlauf



(b) Stellgröße

Abbildung 6.2: Vergleich der drei Gütefunktionen für die Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 10 \ 10]^T$.

wird die in [57] definierte Funktion

$$\sum_i \frac{1}{T^4} \int_0^T |s_i(t)| \cdot t^4 dt, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.1)$$

verwendet. Im konkreten Fall ist $T = 10$ und $n = 8$. Dieses Maß hat den Vorteil, dass es stetig ist und durch die starke zeitliche Gewichtung zu sehr schnellen Regelungen führt.

Die zeitoptimale Steuerung ist für die konkrete Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 10 \ 10]^T$ entworfen worden und dient als theoretische Grenze für die Schnelligkeit der Regelungen. Dabei wird die Stellgröße am besten ausgenutzt, da die Steuerung immer den minimal bzw. maximal zulässigen Wert kommandiert. Durch eine verhältnismäßig gute Stellgrößenausnutzung zeichnen sich ebenfalls die weichen strukturvariablen Regelungen aus, für deren Entwurf das in Kap. 4 beschriebene LMI-basierte Verfahren verwendet wurde. Unabhängig vom gewählten Gütemaß erreichen sie daher Ausregelzeiten $T_{5\%}$, die deutlich niedriger sind als jene, die man mit Hilfe der schnellsten linearen Regelung erreichen kann. In Abb. 6.3 sind sie im Vergleich zueinander aufgetragen. Sehr gute Ergebnisse

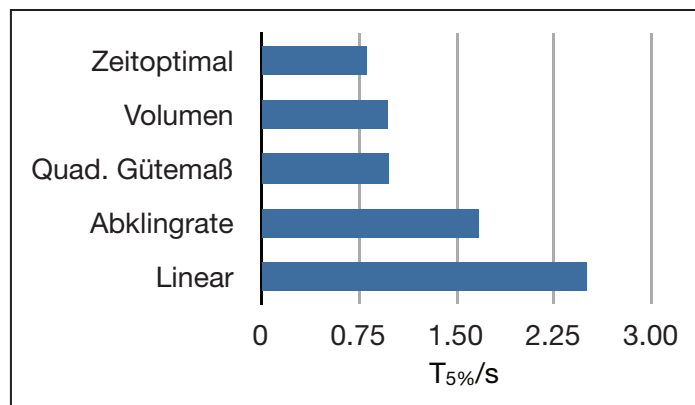


Abbildung 6.3: Vergleich der Ausregelzeiten $T_{5\%}$ bei einer Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 10 \ 10]^T$.

werden beim Vorgeben des Anfangsreglers und Optimieren des Volumens des Anfangsgebiets erzielt. Ähnlich gut schneidet auch das quadratische Gütemaß ab. Die Bestimmung der Gewichtungsmatrix $\hat{\mathbf{G}}$ ist allerdings aufwendiger als das Festlegen eines guten zulässigen Anfangsreglers. Das Maximieren der Abklingrate des Anfangssystems führt verglichen mit den anderen zwei Kriterien zu einer deutlich höheren Ausregelzeit $T_{5\%}$.

Es hat allerdings den Vorteil, dass außer dem Streckenmodell, der Stellgrößenbeschränkung und der Menge möglicher Anfangsauslenkungen keine weiteren Vorgaben notwendig sind. Die Verbesserung im Vergleich zu dem linearen Regler ist zwar geringer als in den beiden anderen Fällen, aber trotzdem deutlich erkennbar.

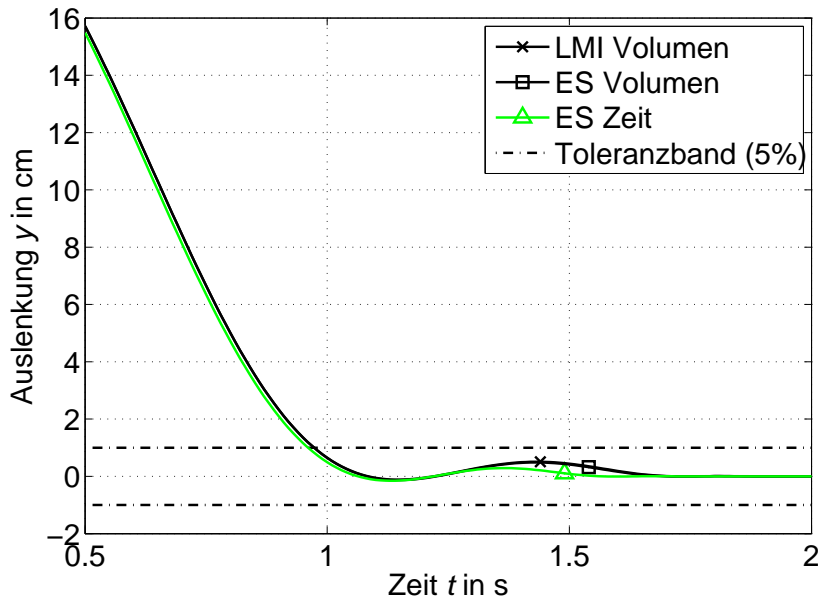


Abbildung 6.4: Vergleich der mittels einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung erzielten Verläufe in Abhängigkeit der Optimierungsmethode bei einer Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 10 \ 10]^T$.

Dass der LMI-Entwurf bezüglich des Entwurfsaufwands und einer einfachen Handhabbarkeit deutliche Vorteile hat, wurde schon in Kap. 4 erläutert. Die Forderungen nach einem konvexen Gütemaß und konvexen Nebenbedingungen begrenzen allerdings die Menge der möglichen Regler. Daher ist nun an dem konkreten Beispielsystem zu untersuchen, wie sich die mittels der neuen LMI-Methode erzielten Ausregelzeiten zu den evolutionär erzielten verhalten. In Abb. 6.4 sind die Schwankungen der Werkzeugposition nach einer Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 10 \ 10]^T$ dargestellt. Wird als Gütemaß das Volumen des Anfangsgebiets \mathcal{G}_1 maximiert, sind die Verläufe bis auf kleine numerische Abweichungen identisch, und zwar unabhängig davon, ob der Entwurf mittels des in Kap. 4 vorgestellten LMI-Verfahrens oder mittels der Evolutionsstrategie aus [4] erfolgte. Wird dagegen mittels der Evolutionsstrategie direkt die Ausregelzeit optimiert¹, erkennt man einen geringfügigen Unterschied in den

¹Wegen seiner Stetigkeit wird auch hier das Gütemaß (6.1) verwendet.

Verläufen. Dieser rechtfertigt allerdings nicht die Anwendung der deutlich zeit- und ressourcenintensiveren Evolutionsstrategie. Für dieses Beispiel ist daher der LMI-Entwurf vorzuziehen, wodurch sich sehr gute Ausregelzeiten mit sehr geringem Entwurfsaufwand erreichen lassen.

6.2 Verladebrücke

Beim zweiten Beispiel handelt es sich um einen Kran, der zum Be- und Entladen von Containerschiffen verwendet wird. Aus ökonomischen Gründen ist eine möglichst schnelle Verladung erstrebenswert. Dafür soll sich die Laufkatze mit hoher Geschwindigkeit bewegen, was allerdings zu unerwünschten Schwingungen der Last führt und ein gezieltes Absetzen der Container verhindert. Das Problem lässt sich mit einer Regelung lösen. Verwendet wird das Modell aus [2], wobei der Zustandsvektor um die Kraft F erweitert wird. Die restlichen Elemente sind, wie in Abb. 6.5

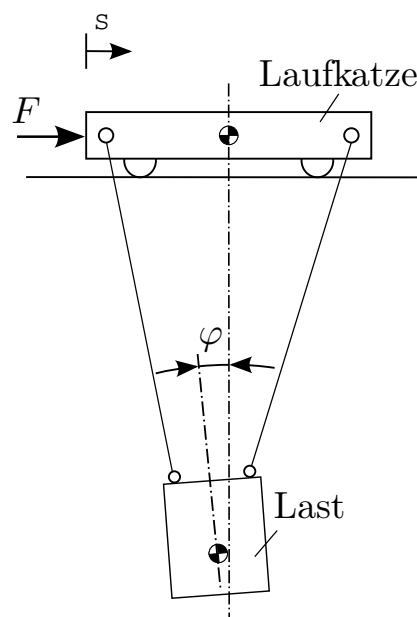


Abbildung 6.5: Laufkatze mit Container.

dargestellt, die Position der Laufkatze s , deren Geschwindigkeit \dot{s} , der Pendelwinkel der Last φ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$. Das Modell

hat dann die Gestalt

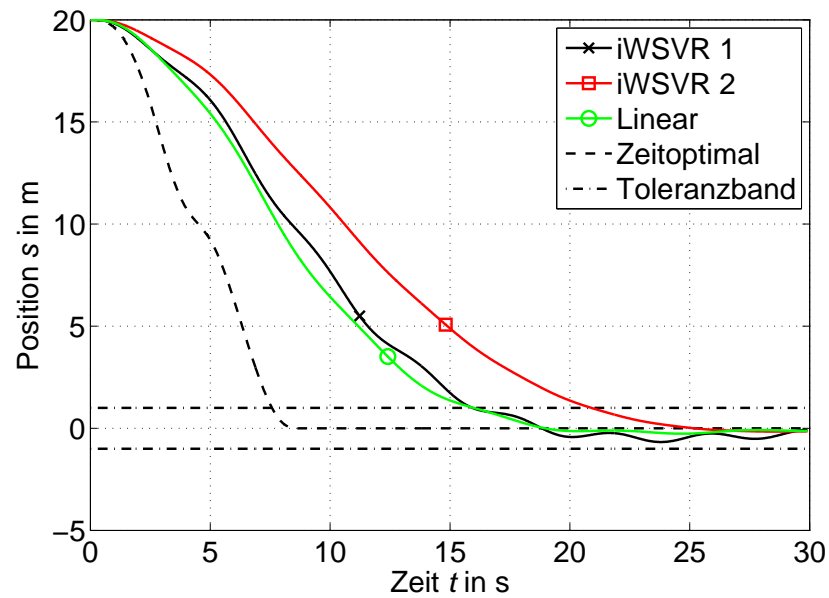
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12,4949 & 0 & 0,0312 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1,1895 & 0 & 0,0011 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,9100 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,94 \end{bmatrix} u,$$

mit $\mathbf{x} = [s \ \dot{s} \ \varphi \ \dot{\varphi} \ F]^T$. Als Stellgröße u dient der Strom des Elektromotors der Laufkatze. Er ist auf $|u| \leq 100$ A begrenzt. Die Systemmatrix \mathbf{A} hat zwei Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0$ im Ursprung, ein rein imaginäres Eigenwertpaar $\lambda_{3,4} = \pm 1,09i$ und einen reellen Eigenwert $\lambda_5 = -0,91$, d. h. das unregelte System ist instabil. Die Menge

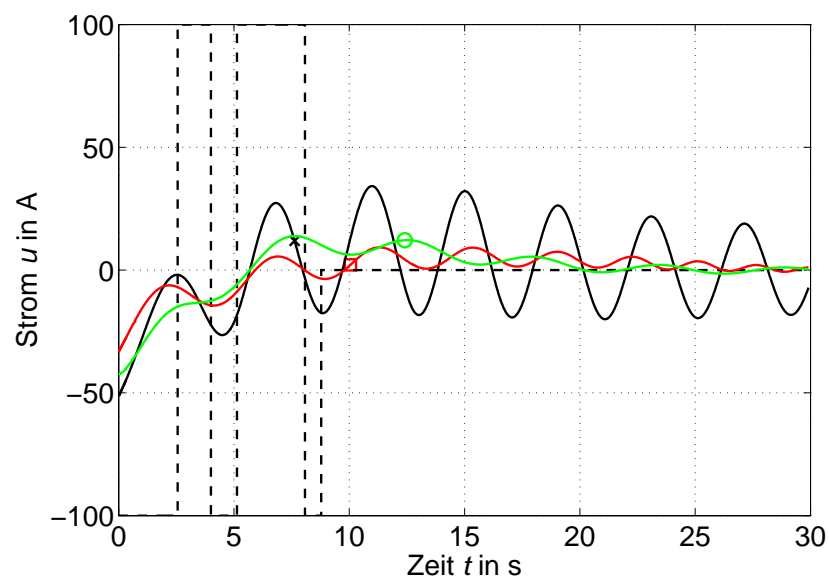
$$\mathcal{X}_0 = \left\{ \mathbf{x} \mid |s| \leq 20 \text{ m}, |\dot{s}| \leq 3 \text{ ms}^{-1}, \varphi \leq 5^\circ \frac{\pi}{180^\circ}, \dot{\varphi} \leq 2^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \text{ s}^{-1}, F = 0 \text{ kN} \right\}$$

enthält alle möglichen Anfangsauslenkungen \mathbf{x} . Für alle Auslenkungen innerhalb dieser Menge ist die Regelung so auszulegen, dass die Laufkatze die gewünschte Position s innerhalb eines Toleranzbandes von ± 1 m in minimaler Zeit erreicht und der Pendelwinkel kleiner als $\pm 1^\circ$ bleibt. Da sich durch eine Koordinatentransformation jede Wunschposition in den Ursprung transformieren lässt, ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ angestrebt wird. Zuerst wird zu diesem Zweck eine implizite weiche strukturvariable Regelung entworfen. Problematisch ist allerdings, dass die zur Verfügung stehende Stellgröße zum Reduzieren des hohen Imaginäranteils der Eigenwerte des unregelten Systems nicht ausreicht. Dadurch erhält man ein schlecht gedämpftes Anfangssystem. Werden nun die Eigenwerte auf Strahlen nach links verschoben, bleibt das Verhältnis zwischen Real- und Imaginärteil konstant, was zu unerwünschten Schwingungen des geregelten Systems führt (siehe Abb. 6.6). Das Ergebnis verschlechtert sich dabei so weit, dass ein optimierter linearer Regler bessere Ausregelzeiten erreicht. Weiterhin ist zu erkennen, dass der Regler iWSVR1 die Stellgröße besser als der Regler iWSVR2 ausnutzt. Dies führt jedoch dazu, dass das Anfangssystem Eigenwerte mit höherem Imaginäranteil besitzt. Daher sind die Schwingungen im Stell- und Zustandsgrößenverlauf stärker ausgeprägt als bei dem langsameren iWSVR2 Regler.

In solchen Fällen haben abschnittsweise lineare Regelungen durch die höhere Freiheit bei der Verschiebung der Eigenwerte einen deutlichen Vorteil gegenüber den impliziten weichen strukturvariablen Regelungen. Der Mehraufwand, der durch die Suche nach geeigneter Polkonfiguration



(a) Positionsverlauf



(b) Stellgrößenverlauf

Abbildung 6.6: Verläufe bei Verwendung impliziter weicher strukturvaria-
bler Regelungen für eine Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

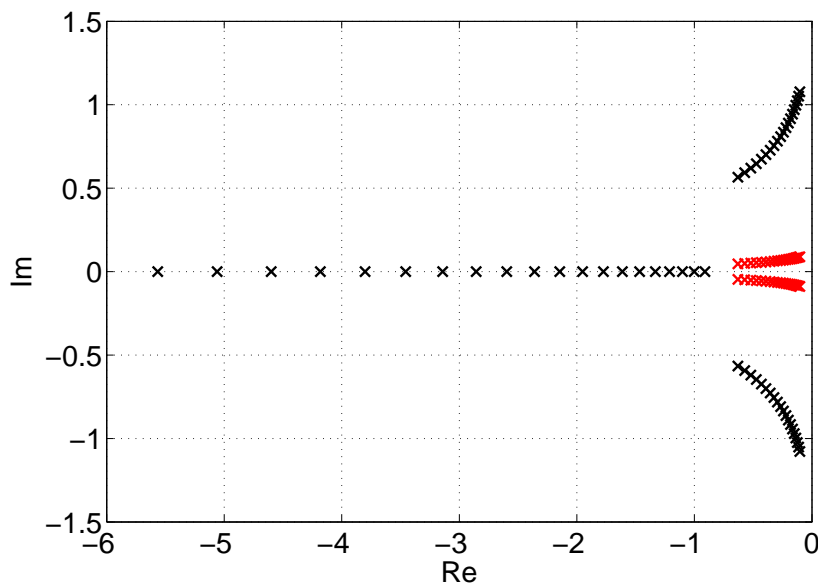


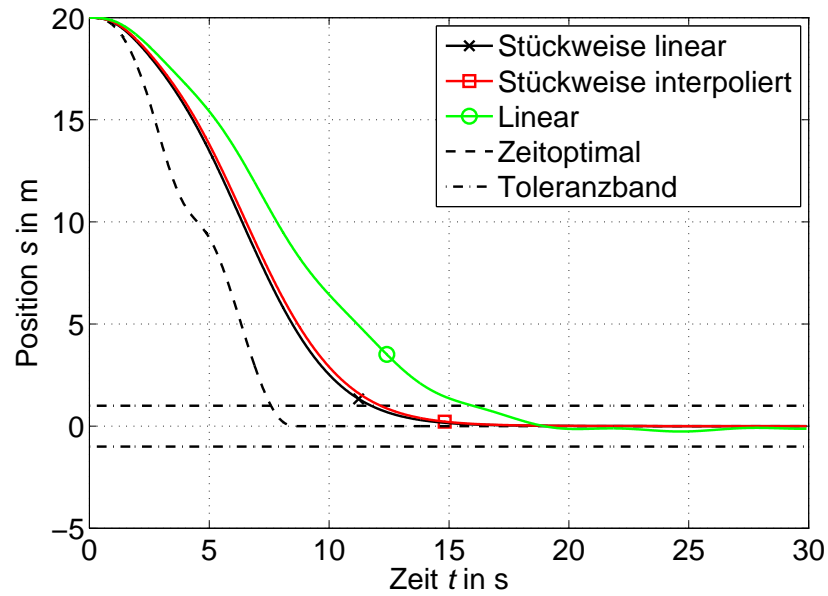
Abbildung 6.7: Verschieben der Eigenwerte des geregelten Systems gemäß der Vorschrift $1,1^{(k-1)}\Re(\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_1)) + (1 - \frac{k-1}{40})\Im(\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_1))$, $k = 1, \dots, 20$.

entsteht, wird durch das deutlich bessere Ausregelverhalten gerechtfertigt. Bei dem hier betrachteten Problem werden die Eigenwerte gemäß der Vorschrift

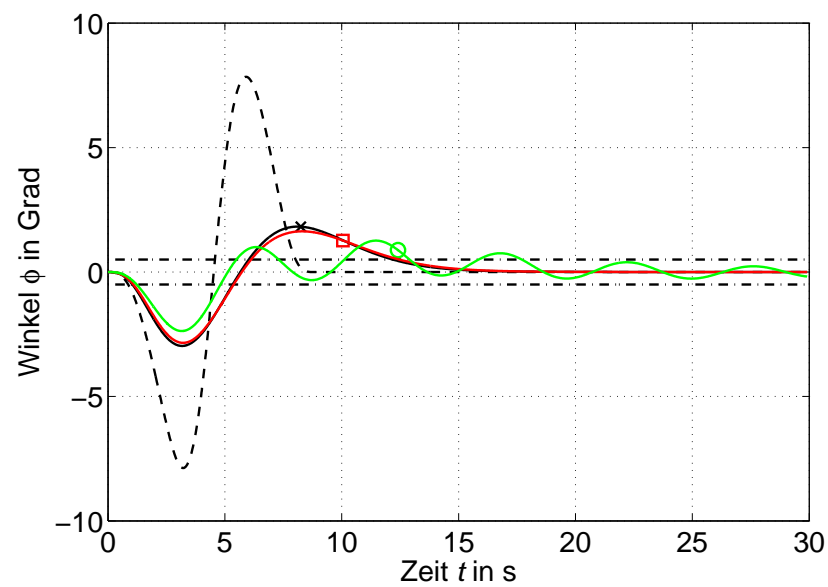
$$1,1^{(k-1)}\Re(\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_1)) + \left(1 - \frac{k-1}{40}\right)\Im(\text{eig}(\hat{\mathbf{A}}_1)), \quad k = 1, \dots, 20$$

verschoben. Das Ergebnis ist in Abb. 6.7 dargestellt. Es wird eine allmähliche Reduzierung des Imaginär- zu Realteil-Verhältnisses gefordert. Die erzielten Verläufe werden in Abb. 6.8 und Abb. 6.9 aufgezeigt. Als Vergleich dienen auch hier eine möglichst schnelle lineare Regelung² und eine für den gegebenen Anfangszustand zeitoptimale Steuerung. Erwartungsgemäß sind die Ergebnisse deutlich besser als jene, die mittels der impliziten weichen strukturvariablen Regelungen erreicht wurden. Allerdings kann hier der unstetige Stellgrößenverlauf bemängelt werden (siehe Abb. 6.9). Dieser Nachteil kann im Weiteren durch eine Interpolation zwischen den Teilreglern behoben werden. Die Stabilität wird in diesem Fall, wie in Abschnitt 5.5 erläutert, durch eine zusätzliche Nebenbedingung sichergestellt. Dadurch wird der Bereich zulässiger Parameter unter Umständen eingeschränkt. Deswegen ist in Abb. 6.8 neben der Regelung mit

²Diese wird, wie in Abschnitt 6.1, durch Minimierung des Gütemaßes (6.1) mit Hilfe einer Evolutionsstrategie ermittelt.



(a) Positionsverlauf



(b) Winkelverlauf

Abbildung 6.8: Zustandsverläufe bei Verwendung einer schaltenden Regelung für eine Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

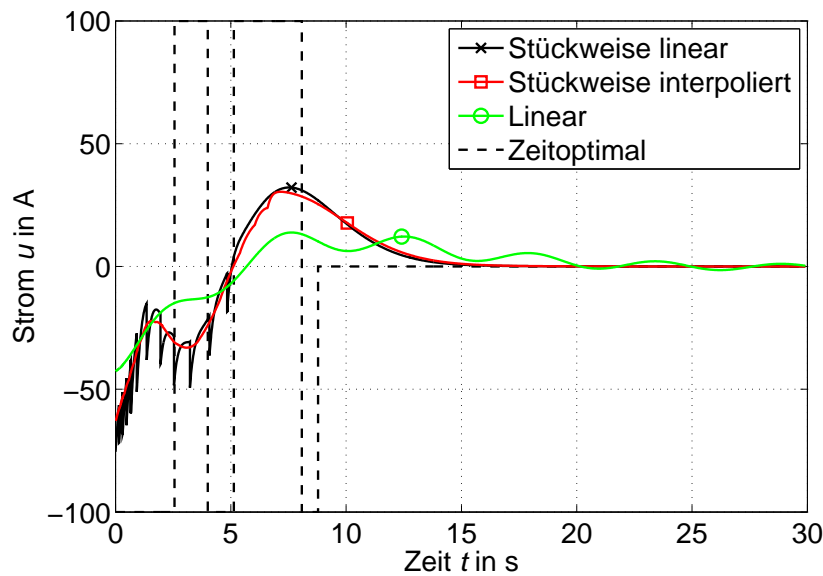


Abbildung 6.9: Stellgrößenverläufe bei Verwendung einer schaltenden Regelung für eine Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0) = [20 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

stetigem Stellgrößenverlauf auch diese, die sprunghaft zwischen den linearen Teilreglern schaltet, aufgezeigt. Im Verlauf der Zustandsgrößen sind beim betrachteten Beispielsystem keine relevanten Unterschiede erkennbar. Es ist also die Verwendung einer stückweise interpolierten Regelung zu empfehlen.

6.3 Flugzeug

In den vorigen Beispielen wurde das Verhalten der Regelungen nur für einen bestimmten Zustand am Rand des Gebiets möglicher Anfangsauslenkungen betrachtet. Für solche Auslenkungen schneiden die linearen Regelungen, falls sie die Stellgröße am Anfang voll ausnutzen, verhältnismäßig gut ab. Der Vorteil der nichtlinearen Regelungen wird deutlicher bei kleineren Auslenkungen. In diesem Abschnitt wird dies am Beispiel des Modells des Business-Jets Cessna Citation 500 aus [63] veranschaulicht.

Das Modell des Flugzeugs ist bei einer Flughöhe von 5000 m und konstanten Reisegeschwindigkeit von 128,2 m/s linearisiert worden und

hat folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -1,2822 & 0 & 0,98 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5,4293 & 0 & -1,8366 & 0 \\ -128,2 & 128,2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -0,3 \\ 0 \\ -17 \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.\end{aligned}$$

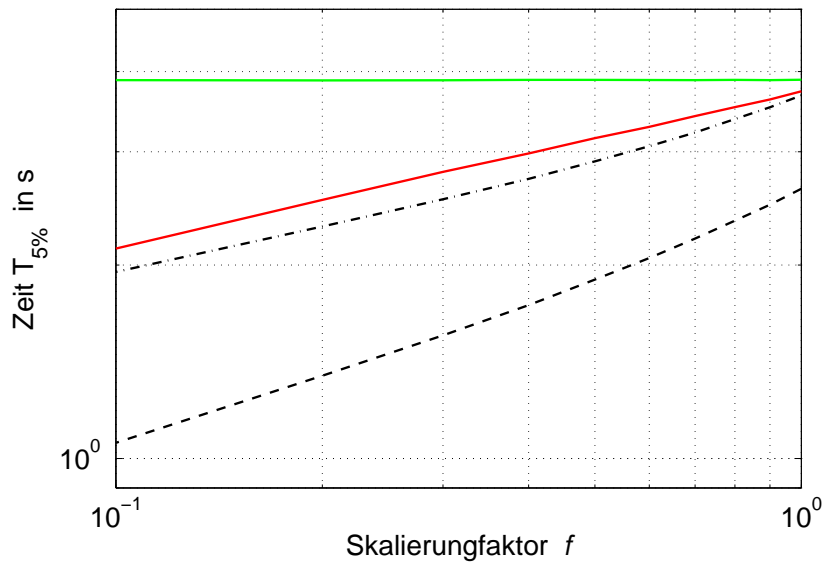
Das ungeregelte System besitzt zwei Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 0$ im Ursprung und ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar $\lambda_{3,4} = -1,56 \pm 2,29i$. Das System lässt sich durch Verstellung des Höhenruderwinkels u beeinflussen, der auf $|u| \leq 15^\circ$ begrenzt ist. Der Zustandsvektor \mathbf{x} enthält den Anstellwinkel α , den Nickwinkel Θ , die Nickwinkelgeschwindigkeit $\dot{\Theta}$ und die Flughöhe h bezüglich des Sollwertes von 5000 m. Als Ausgangsgröße wird hier die Flughöhe betrachtet. Die Menge der möglichen Anfangsauslenkungen ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{X}_0 = \{\mathbf{x} \mid |\alpha| \leq 15^\circ \frac{\pi}{180^\circ}, |\Theta| \leq 10^\circ \frac{\pi}{180^\circ}, |\dot{\Theta}| \leq 10^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \text{s}^{-1}, |h| \leq 40 \text{ m}\}.$$

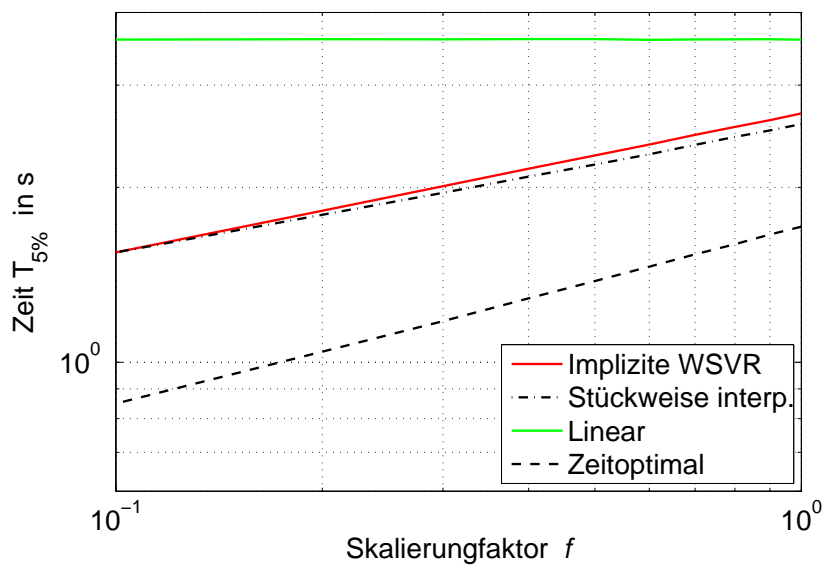
Die Regelung soll dafür sorgen, dass die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nach einer Abweichung innerhalb der Menge \mathcal{X}_0 möglichst schnell erreicht wird. Die Güte der Regelung wird auch hier anhand der Ausregelzeit $T_{5\%}$ beurteilt. Diese wird mit Hilfe von Simulationen für verschiedene Anfangsauslenkungen am Rand und innerhalb der Menge \mathcal{X}_0 bestimmt. Die Punkte innerhalb der Menge \mathcal{X}_0 ergeben sich durch Skalierung der maximal möglichen Auslenkung $\mathbf{x}(0)$ mit dem Faktor $f < 1$.

In Abb. 6.10 sind die Ergebnisse für zwei der Eckpunkte \mathcal{X}_0 dargestellt, wobei es sich in Abb. 6.10(a) um die Auslenkung handelt, bei dem die lineare Regelung am besten abschneidet. Zu bemerken ist auch, dass es sich dabei um den besten mittels Evolutionsstrategie ermittelten linearen Regler handelt³. Selbst in diesem Fall ist der Vorteil der nichtlinearen Regelungen insbesondere für kleine Auslenkungen deutlich. Während die Ausregelzeit $T_{5\%}$ bei der linearen Regelung nicht von der Anfangsauslenkung abhängt, nimmt sie bei den nichtlinearen Regelungen und der zeitoptimalen Steuerung bei kleiner werdenden Auslenkungen kontinuierlich ab. Das leicht bessere Abschneiden der stückweise interpolierten Regelung ist durch einen höheren Entwurfsaufwand erkauft, so dass für das betrachtete Beispielsystem die weiche strukturvariable Regelung bevorzugt werden sollte.

³Als Gütemaß wird auch hier die Funktion (6.1) minimiert.



(a) $\mathbf{x}(0) = [15 \ -10 \ -10 \ -40]^T$ bei $f = 1$



(b) $\mathbf{x}(0) = [15 \ 10 \ 10 \ 40]^T$ bei $f = 1$

Abbildung 6.10: Ausregelzeiten $T_{5\%}$ abhängig von der Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(0)$ und der gewählten Regelung.

6.4 Vergleich und Bewertung der Regelungen

Mittels der vorgeschlagenen LMI-basierten Verfahren wurden in den vorherigen Abschnitten einige strukturvariable Regelungen entworfen. Diese erreichen eine bestimmte Regelgüte und erfordern einen gewissen Entwurfsaufwand. Da sich viele Ergebnisse auf weitere Systeme übertragen lassen, sollen sie im vorliegenden Abschnitt zusammengefasst werden.

Im Allgemeinen sind die vorgestellten strukturvariablen Regelungen unabhängig vom gewählten Entwurfsverfahren schneller als lineare Regelungen aufgrund der besseren Stellgrößenausnutzung. Dabei ist dieser Vorteil für kleine Auslenkungen besonders deutlich. Wie nah sie an die zeitoptimale Steuerung kommen, ist allerdings system- und zustandsabhängig. Bei stark schwingungsfähigen Systemen ist es mit Hilfe einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung beispielsweise oft nicht möglich, eine sehr schnelle Ausregelung zu erreichen. Problematisch in dem Fall ist, dass bei der festgelegten Eigenwertverschiebung das Verhältnis von Real- zu Imaginärteil konstant bleibt. Dies führt zu unerwünschten Schwingungen in Stell- und Zustandsgrößenverlauf. Daher ist der Einsatz von abschnittsweise linearen Regelungen sinnvoll, die deutlich größere Freiheit bei der Verschiebung der Eigenwerte erlauben. Dabei können die Sprünge im Stellgrößenverlauf durch eine Interpolation zwischen den linearen Teilreglern vermieden werden. Die größere Freiheit bei der Verschiebung der Eigenwerte erfordert allerdings einen deutlich höheren Entwurfsaufwand.

Die Darstellung der Entwurfsaufgabe als LMI-Problem liefert bei allen Beispielen eine deutliche Zeitersparnis bei der Optimierung. Da hierfür ein konvexes Gütemaß erforderlich ist, wird die Ausregelzeit $T_{5\%}$ nicht direkt optimiert. Die Ergebnisse spiegeln daher nicht unbedingt das globale Optimum bezüglich der Ausregelzeit $T_{5\%}$ wieder. Sie sind aber oft, wie z. B. bei dem hydraulischen Aktor, nahezu optimal. Dabei ist es in Bezug auf die Ausregelzeit in vielen Fällen günstiger, einen linearen Startregler vorzugeben, der die Stellgröße gut ausnutzt, und nur die Matrix \mathbf{R}_1 zu optimieren. Nachteilig im Vergleich zu einer gleichzeitigen Optimierung des Reglers und der Größe des Einzugsgebiets ist allerdings der etwas höhere Entwurfsaufwand. Es ist in diesem Fall möglich, dass für den vorgegebenen Anfangsregler keine zulässige Matrix \mathbf{R}_1 existiert. Daher sind unter Umständen einige Iterationen notwendig, bis eine zulässige Kombination der Parameter $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 ermittelt wird. Je nach Randbedingungen ist also einen Kompromiss zwischen Aufwand und Güte zu treffen.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Zum Umgang mit den in der Praxis immer auftretenden Stellgrößenbeschränkungen existiert eine Vielfalt von Verfahren, die sich in ihrem Entwurf, dem Funktionsprinzip und dem benötigten Rechenaufwand unterscheiden. Die hier betrachteten strukturvariablen Regelungen zeichnen sich durch eine schnelle Ausregelung sowie verhältnismäßig geringen Aufwand bei Online-Berechnungen und Entwurf aus. Jedoch kann der Entwurfsaufwand mit den in dieser Arbeit vorgeschlagenen LMI-basierten Verfahren deutlich reduziert werden. Bei einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung ist er jetzt mit dem Aufwand zum Entwurf einer linearen Zustandsrückführung vergleichbar.

Die Bestimmung der Parameter einer weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen wurde bis jetzt auf ein nichtlineares Optimierungsproblem reduziert, welches sich mittels eines Suchverfahrens wie z. B. einer Evolutionsstrategie lösen ließ. Diese Verfahren zeichnen sich meistens durch lange Rechenzeiten aus, was im Allgemeinen einen einfachen und schnellen Entwurf verhindert. Deutlich leichter gestaltet sich der Entwurf, wenn ein konvexes Problem vorliegt. Dies ist der Fall, wenn die Nebenbedingungen und Gütefunktion konvex sind, was sich bei der untersuchten weichen strukturvariablen Regelung nach gewissen Umformungen erreichen lässt. Zunächst sind alle Nebenbedingungen als lineare Matrixungleichungen darzustellen. Die Hauptschwierigkeit liegt dabei in der Umformung der Monotonie-Bedingung¹. Sie erfordert, dass ein von den Optimierungsparametern abhängiges Polynom innerhalb eines gegebenen Intervalls monoton fällt bzw. seine Ableitung nicht größer als null wird. Nach geschickter Transformation des Intervalls und anschließender Anwendung der Regel von Newton oder Betrachtung des transformierten Polynoms als parameterabhängige Matrix ist es allerdings möglich, die Bedingung in die gewünschte LMI-Form zu bringen. Auch die anderen Nebenbedingungen werden in dieser Form

¹Siehe Abschnitt 4.3.

dargestellt. Die dadurch definierte Menge ist eine leicht konservativere Abschätzung der durch die ursprünglichen Forderungen definierten Menge. Im Gegenzug ist sie allerdings konvex. Nach Wahl einer konvexen Gütefunktion ist das Optimierungsproblem mittels Standardverfahren der konvexen oder semidefiniten Optimierung lösbar. Diese Verfahren können schnell und zuverlässig das globale Optimum finden. Die Entwurfszeit liegt damit im Sekundenbereich. Dies ist eine deutliche Verbesserung im Vergleich zu der Zeit, die bei einer Evolutionsstrategie benötigt wird. Zu vermerken ist ebenfalls, dass für stabile Systeme erfahrungsgemäß immer eine Lösung existiert.

Des Weiteren wurde die Frage nach einer geeigneten Gütefunktion untersucht. Da die Ausregelzeit normalerweise keine konvexe Funktion darstellt, wird sie nur indirekt optimiert. Als geeignete konvexe Gütefunktionen haben sich das Volumen des Anfangsgebiets und die Abklingrate des Anfangssystems erwiesen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass bei einer Volumenoptimierung die gleichzeitige Optimierung des Startreglers $\hat{\mathbf{a}}$ und der Matrix \mathbf{R}_1 zu einem unrestrictierten Problem führen kann. Daher erfolgt der Entwurf in zwei Schritten. Zuerst wird ein Startregler festgelegt, der die Stellgröße möglichst gut ausnutzt, und im zweiten Schritt wird das Ljapunov-Gebiet bzw. die Matrix \mathbf{R}_1 optimiert. Häufig führt dieses Vorgehen auch bei der Optimierung der Abklingrate des Anfangssystems zu besseren Ausregelzeiten. Dadurch sind aber unter Umständen einige Iterationen notwendig, um eine zulässige Kombination von den Parametern $\hat{\mathbf{a}}$ und \mathbf{R}_1 zu ermitteln. Werden beide Parameter gleichzeitig optimiert, kann der Entwurf automatisch in einem Schritt erfolgen. Außer dem Streckenmodell, der Stellgrößenbeschränkung und der Menge möglicher Anfangszustände sind keine weiteren Vorgaben notwendig. Sind die damit erreichten Ausregelzeiten nicht zufriedenstellend, sind die Parameter immerhin sehr gute Initialwerte für eine weitere Optimierung.

Als konvexe Gütefunktion kann auch ein quadratisches Gütemaß in Frage kommen. Das Festlegen einer Gewichtungsmatrix ist aber ähnlich wie bei einer linear-quadratischen Regelung besonders bei Systemen höherer Ordnung aufwendig. Daher werden meistens die beiden anderen Maße bevorzugt.

Die Idee, die Nebenbedingungen als lineare Matrixungleichungen darzustellen, wurde des Weiteren auf die Regelung mit stückweise linearer Struktur von Kiendl [50] übertragen. Deren Entwurf verglichen mit dem einer impliziten weichen strukturvariablen Regelung erfordert größeren Aufwand, der hauptsächlich durch die Wahl einer geeigneten Polverschiebung entsteht. Dadurch gewinnt man aber einen zusätzlichen Freiheits-

grad, was sich bei stark schwingungsfähigen Strecken als nützlich erweist. Eine Erweiterung der Entwurfsbedingungen ermöglicht auch eine Interpolation zwischen den einzelnen Teilreglern, wodurch sich die unerwünschten Sprünge im Stellgrößenverlauf vermeiden lassen.

Die mittels der entwickelten Entwurfsverfahren erzielten Ergebnisse lassen sich anhand dreier Beispielsysteme demonstrieren. Die impliziten weichen strukturvariablen Regelungen zeichnen sich durch gute Stellgrößenausnutzung und sehr gute, in einigen Fällen fast zeitoptimale Ausregelzeiten aus. Insbesondere für kleine Auslenkungen um die Ruhelage sind sie deutlich schneller als die beste lineare Zustandsrückführung bei vergleichbarem Entwurfsaufwand. Bei stark schwingungsfähigen Systemen ist allerdings der Gebrauch der aufwendigeren stückweise linearen Regelung sinnvoll.

Bei den Betrachtungen in dieser Arbeit wurde die Kenntnis der genauen Systemparameter vorausgesetzt. Normalerweise können sie aber innerhalb eines bestimmten Bereichs variieren. Man spricht in diesem Fall von Systemunsicherheiten. Deren Einfluss auf eine implizite strukturvariable Regelung wird in [47] näher betrachtet. Das Einbeziehen in die vorgestellten Entwurfsverfahren ist ein interessantes Thema für weitere Untersuchungen.

Ferner ist eine Erweiterung der Entwurfsverfahren für Mehrgrößensysteme wünschenswert. Eine solche existiert schon für weiche strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen (siehe [32]). Problematisch dabei ist allerdings, dass Güte und Existenz des Reglers stark von der Stellgrößenbeschränkung abhängen. Diese Abhängigkeit ist daher genauer zu erforschen.

Eine andere Weiterentwicklung weicher strukturvariabler Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen findet sich in [58], wo eine Sättigung der Stellgröße zugelassen wird. Dies führt zur weiteren Verbesserung der erreichten Ausregelzeiten. Dabei wird die Stabilität ähnlich wie in [42] durch eine zusätzliche Nebenbedingung sichergestellt. Die Übertragung dieser Idee auf den mehrdimensionalen Fall ist zu untersuchen. Das Einbeziehen von Begrenzungen der Stellrate im gesättigten sowie ungesättigten Fall ist ein weiteres Forschungsthema.

A Anhang

A.1 Stabilitätssatz von Ljapunov

Satz A.1 (Siehe z. B. [49, Theorem 4.1]) *Das dynamische System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ besitze eine Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Existiere in der Umgebung $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$ von $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eine stetig differenzierbare Funktion $V : \mathcal{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften*

1. $V(\mathbf{x}) > 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$, wobei $V(\mathbf{0}) = 0$ und
2. $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0$,

dann ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ stabil.

Ist ferner $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_0 \setminus \{\mathbf{0}\}$, dann ist die Ruhelage $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ asymptotisch stabil.

A.2 Nebenbedingungen in LMI-Form

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Nebenbedingungen für den Entwurf einer weichen strukturvariablen Regelung mittels impliziter Ljapunov-Funktionen sich als LMIs in den Variablen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}_1^{-1} \text{ und } \mathbf{z} = \mathbf{R}_1^{-1} \hat{\mathbf{a}} \quad (\text{A.1})$$

darstellen lassen. Im Weiteren werden alle Entwurfsbedingungen nochmals zusammengefasst dargestellt, um das schnelle Auffinden zu erleichtern:

$$\mathbf{Q} \succ 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{A}^T + \mathbf{a}\mathbf{b}^T) + (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{a}^T)\mathbf{Q} - \mathbf{z}\mathbf{b}^T - \mathbf{b}\mathbf{z}^T \prec 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{Q} \prec 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}^T \\ \mathbf{x} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 - \mathbf{a}^T \mathbf{Q} \mathbf{a} + 2\mathbf{a}^T \mathbf{z} & \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{A.6})$$

für $\forall i \in \{0, 1, \dots, m\}$:

$$\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \mathbf{a}^T \mathbf{P}(0, i-k) \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{P}(0, k) \mathbf{a} - \mathbf{z}^T \mathbf{N} \mathbf{P}(n, i) \mathbf{a} \geq 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\text{mit } \mathbf{P}(l, k) = \begin{cases} \prod_{q=0}^{k-1} [(l-q)\mathbf{I} + \mathbf{M}] & \text{für } k \neq 0 \\ \mathbf{I} & \text{für } k = 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{M} = \text{diag}(0, 1, \dots, n-1).$$

Die Ungleichungen (A.2), (A.3) und (A.4) erhält man aus den Bedingungen (4.17), (4.18) und (4.19) durch beidseitige Multiplikation mit der regulären Matrix \mathbf{R}_1^{-1} . Die Herleitung der restlichen Bedingungen ist in Abschnitt 4.3 und Abschnitt 4.4 erläutert. Des Weiteren kann Bedingung (A.7) durch

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{G} + \mathbf{G}^T = 0, \quad \Theta_{\Sigma} < \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mathbf{S} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

wobei

$$a_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^i \mathbf{a}^T \mathbf{H}(n+k-i) \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{H}(n-k+1) \mathbf{a} - \\ \quad - \mathbf{z}^T \mathbf{N} \mathbf{H}(n-i) \mathbf{a} & \text{für } i \leq (m-1)/2 \\ \sum_{k=1}^{2n-i} \mathbf{a}^T \mathbf{H}(k) \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{H}(2n-i-k+1) \mathbf{a} & \text{für } i < m+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{cases} \mathbf{H}_{i,j} = 1 & \text{für } i = j = k \\ \mathbf{H}_{i,j} = 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\tilde{a}_j = \sum_{i=j}^m \binom{i}{i-j} \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right)^{i-j} \left(\frac{1-\epsilon}{2} \right)^i a_i$$

$$\text{und } \Theta_{\Sigma} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & & & & \\ \tilde{a}_1 & 2\tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & & & \\ & \tilde{a}_3 & 2\tilde{a}_4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \tilde{a}_{m-2} & 2\tilde{a}_{m-1} & \tilde{a}_m \\ & & & & \tilde{a}_m & 0 \end{bmatrix} \quad \text{gilt,}$$

ersetzt werden, die theoretisch weniger konservativ ist. Erfahrungsgemäß sind die Simulationsergebnisse fast identisch, unabhängig davon, ob man Bedingung (A.7) oder (A.8) verwendet.

A.3 Matrizen: verwendete Definitionen, Lemmata, Sätze

Definition A.1 *Eine symmetrische Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird als positiv definit (positiv semidefinit) bezeichnet, falls $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} > 0$ ($\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \geq 0$) gilt. Falls $(\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} < 0)$ bzw. $(\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} \leq 0)$ gilt, ist \mathbf{S} negativ definit bzw. negativ semidefinit.*

Lemma A.1 (Siehe [90, Lemma 2]) *Wenn die zwei Matrizen \mathbf{P} und $\mathbf{Q}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{Q}$ positiv definit sind, so ist auch die Matrix \mathbf{Q} positiv definit.*

Satz A.2 (Siehe [35, Theorem 2.4]) *Für eine symmetrische Matrix \mathbf{S} sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. \mathbf{S} ist positiv semidefinit.
2. $\text{Tr}(\mathbf{S}\mathbf{P}) \geq 0$ für alle $\mathbf{P} \succeq 0$.

Satz A.3 (Siehe [75, Theorem 4.3]) *Sind die 2×2 -Matrizen \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 stabil, dann haben die zwei linearen zeitinvarianten Systeme $\Sigma_{\mathbf{H}_1}$ und $\Sigma_{\mathbf{H}_2}$ eine gemeinsame quadratische Ljapunov-Funktion dann und genau dann, wenn die Produkte $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2$ und $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2^{-1}$ keine negativen reellen Eigenwerte besitzen.*

A.4 Duales Problem

Handelt es sich um eine restringierte Optimierungsaufgabe, taucht häufig der Begriff „duales Problem“ auf. Ziel dieses Abschnitts ist es, den Zusammenhang mit dem primalen Problem zu erläutern. Im Weiteren wird erklärt, warum bei vielen restringierten Optimierungsaufgaben die Betrachtung des dualen Problems sinnvoll ist. Die allgemeinen Ergebnisse werden dann auf ein semidefinites Programm übertragen. Die Grundideen und Begriffe sind hier nur kurz skizziert. Eine ausführliche Einführung in die Thematik sowie in konvexe Optimierung findet sich in [13].

Gegeben sei ein allgemeines primales Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min f_0(\mathbf{x}) \\ \text{u. d. N. } & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m \text{ und } h_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Es wird vorausgesetzt, dass die Menge der zulässigen Lösungen \mathcal{Z} nicht leer ist. Dann können die Nebenbedingungen innerhalb der Gütefunktion berücksichtigt werden, indem diese durch die gewichtete Summe der Nebenbedingungen erweitert wird. Da diese Idee von Lagrange herrührt, wird die dadurch entstandene Funktion

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(\mathbf{x})$$

als Lagrange-Funktion bezeichnet. Die Faktoren λ_i und ν_i sind die so genannten Lagrange-Multiplikatoren. Das Minimum dieser Funktion über \mathbf{x} , für $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^p$

$$g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{Z}} (f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(\mathbf{x}))$$

wird als duale Funktion bezeichnet. Die duale Funktion hat zwei wichtige Eigenschaften, die ihre Einführung begründen [13]:

- Sie ist immer konkav.
- Sie liefert untere Grenzen für das Optimum p^* des Problems (A.9), für beliebige $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m$ und $\boldsymbol{\nu}$ gilt $g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \leq p^*$.

Die Frage ist nun, welche Kombination von $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu})$ mit $\boldsymbol{\lambda} \succeq 0$ die beste untere Grenze für p^* liefert. Dabei bedeutet die Notation $\boldsymbol{\lambda} \succeq 0$, dass alle Elemente $\lambda_i, i = 1, \dots, m$ des Vektors $\boldsymbol{\lambda}$ größer oder gleich null sind. Dies führt zu dem so genannten dualen Problem

$$\begin{aligned} & \max g(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\nu}) \\ \text{u. d. N. } & \boldsymbol{\lambda} \succeq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Da die zu maximierende Funktion immer konkav ist, ist das duale Problem immer konvex, sogar wenn dies für das primale nicht der Fall ist.

Betrachten wir nun das primale semidefinite Programm nach Gl.(3.10):

$$\begin{aligned} & \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{u. d. N. } & -\mathbf{F}(\mathbf{x}) \preceq 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Für die Formulierung des dualen Problems wird die Lagrange-Funktion benötigt. Dafür sollen die zu minimierende Funktion und die Begrenzungen die gleiche Dimension besitzen. Die Anwendung von Satz A.2 liefert

$$-\mathbf{F}(\mathbf{x}) \preceq 0 \Leftrightarrow -\text{Tr}(\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{Z}) \leq 0, \text{ wobei } \mathbf{Z} \succeq 0.$$

Für die Lagrange-Funktion ergibt sich dann

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \text{Tr}(\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{Z}) \\ &= \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^m c_i x_i \right) - \text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) - \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i \mathbf{Z} \right) \\ &= -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) + \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^m (c_i - \mathbf{F}_i \mathbf{Z}) x_i \right). \end{aligned}$$

Die duale Funktion ist entsprechend als

$$g(\mathbf{Z}) = \inf_x L(\mathbf{x}, \mathbf{Z}) = -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) + \inf_x \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^m (c_i - \mathbf{F}_i \mathbf{Z}) x_i \right)$$

definiert. Das Infimum der Funktion über \mathbf{x} ist $-\infty$ für alle $\mathbf{Z} \succeq 0$, wenn $\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) \neq c_i$ gilt. Eine nicht triviale untere Grenze für das primale Problem erhält man also nur, falls $\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i$ ist. Das duale Problem kann dann in der Form

$$\begin{aligned} &\max \quad -\text{Tr}(\mathbf{F}_0 \mathbf{Z}) \\ \text{u. d. N.} \quad &\text{Tr}(\mathbf{F}_i \mathbf{Z}) = c_i \text{ und } \mathbf{Z} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

dargestellt werden. Das ist ein semidefinites Programm. Durch geeigneten Variablenwechsel lässt es sich, wie in [89] gezeigt, auch in die kanonische Form überführen.

A.5 Entwurfsergebnisse

In diesem Abschnitt sind die für die Simulationen in Kap. 6 verwendeten Parameter zusammengefasst.

A.5.1 Hydraulischer Aktor

Regelung / Entwurf	Parameter
Implizite WSVR / LMI-Entwurf, Abklingrate	$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1,677977 & 0,543373 & 0,140299 \\ 0,543373 & 0,32290 & 0,062725 \\ 0,140298 & 0,06272 & 0,026148 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{a}} = [14,345160 \quad 14,837268 \quad 3,598276]^T$
Implizite WSVR / LMI-Entwurf, Quad. Gütemaß	$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 6,294631 & 1,460312 & 0,225733 \\ 1,460312 & 0,512789 & 0,082959 \\ 0,225733 & 0,082959 & 0,025220 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{a}} = [26,931867 \quad 18,052962 \quad 3,477648]^T$
Implizite WSVR / LMI-Entwurf, Volumen	$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 5,006330 & 1,569178 & 0,389787 \\ 1,569178 & 0,545332 & 0,132515 \\ 0,389787 & 0,132515 & 0,040821 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{a}} = [25,652000 \quad 17,204700 \quad 4,050200]^T$
Zeitopt. Steuerung / Numerische Lösung einer GS, Zeit	$\alpha_{\text{opt}} = -1$ $\mathbf{t}_{\text{opt}} = [0 \quad 0,369768 \quad 0,759743 \quad 1,015969]$
Lineare Regelung / ES, Zeit	$\mathbf{k}_{\text{lin}}^{\text{SNF}} = [13,256590 \quad 7,097648 \quad 1,825623]^T$
Implizite WSVR / ES, Volumen	$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2,030910 & 0,626208 & 0,159250 \\ 0,626208 & 0,216178 & 0,053556 \\ 0,159250 & 0,053556 & 0,016724 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{a}} = [25,652000 \quad 17,204700 \quad 4,050200]^T$
Implizite WSVR / ES, Zeit	$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 4,963590 & 1,423820 & 0,402329 \\ 1,423820 & 0,527345 & 0,133272 \\ 0,402329 & 0,133272 & 0,043818 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{a}} = [25,088 \quad 17,031099 \quad 4,022920]^T$

A.5.2 Verladebrücke

Regelung	Parameter
Implizite WSVR1	$\frac{\mathbf{R}_1}{10^4} = \begin{bmatrix} 0,001184 & 0,010572 & 0,007952 & 0,010144 & 0,004476 \\ 0,010572 & 0,114975 & 0,099587 & 0,111119 & 0,062888 \\ 0,007952 & 0,099587 & 0,200568 & 0,149736 & 0,115128 \\ 0,010144 & 0,111119 & 0,149736 & 0,198675 & 0,107238 \\ 0,004476 & 0,062888 & 0,115128 & 0,107238 & 0,130343 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{a}} = [0,028416 \quad 0,291806 \quad 1,394097 \quad 1,471744 \quad 1,180056]^T$
Implizite WSVR2	$\frac{\mathbf{R}_1}{10^4} = \begin{bmatrix} 0,001447 & 0,010330 & 0,014378 & 0,012007 & 0,007502 \\ 0,010330 & 0,109198 & 0,159919 & 0,135410 & 0,086668 \\ 0,014378 & 0,159919 & 0,363950 & 0,337231 & 0,150551 \\ 0,012007 & 0,135410 & 0,337231 & 0,430025 & 0,232123 \\ 0,007502 & 0,086668 & 0,150551 & 0,232123 & 0,199994 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{a}} = [0,019811 \quad 0,251726 \quad 1,431018 \quad 1,649441 \quad 1,329756]^T$
Lineare Regelung	$\mathbf{k}_{\text{lin}} = [2,134955 \quad 17,500242 \quad 12,948626 \quad 65,131249 \quad 0,144200]^T$
Zeitopt. Steuerung	$\alpha_{\text{opt}} = -1$ $\mathbf{t}_{\text{opt}} = [0 \quad 2,557821 \quad 4,003094 \quad 5,132919 \quad 8,080408 \quad 8,785522]$
Stückweise lineare Regelung	$n\text{Reg} = 20, f_{\Re} = 1, 1^{(p-1)}, f_{\Im} = 1 - \frac{p-1}{40}, p = 1, \dots, n\text{Reg}$ $\frac{\mathbf{R}_1}{10^4} = \begin{bmatrix} 0,001517 & 0,010620 & 0,014951 & 0,012819 & 0,007912 \\ 0,010620 & 0,109692 & 0,162336 & 0,141443 & 0,089478 \\ 0,014951 & 0,162336 & 0,357964 & 0,349645 & 0,145602 \\ 0,012819 & 0,141443 & 0,349645 & 0,454716 & 0,246473 \\ 0,007912 & 0,089478 & 0,145602 & 0,246473 & 0,202251 \end{bmatrix}$ $\mathbf{k}_1 = [0,019735 \quad 0,2448430,285586 \quad 0,418935 \quad 0,411625]^T$
Stückweise interp. Regelung	$n\text{Reg} = 20, f_{\Re} = 1, 1^{(p-1)}, f_{\Im} = 1 - \frac{p-1}{40}, p = 1, \dots, n\text{Reg}$ $\frac{\mathbf{R}_1}{10^4} = \begin{bmatrix} 0,000924 & 0,010373 & 0,015700 & 0,014097 & 0,013618 \\ 0,010373 & 0,130875 & 0,193729 & 0,171760 & 0,161944 \\ 0,015700 & 0,193727 & 0,376104 & 0,359555 & 0,268537 \\ 0,014097 & 0,171760 & 0,359555 & 0,406912 & 0,311945 \\ 0,013618 & 0,161944 & 0,268537 & 0,311945 & 0,305473 \end{bmatrix}$ $\mathbf{k}_1 = [0,019735 \quad 0,2448430,285586 \quad 0,418935 \quad 0,411625]^T$

A.5.3 Flugzeug

Regelung	Parameter
Implizite WSVR	$\mathbf{R}_1 = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0,251242 & 0,516680 & 0,065392 & 0,014322 \\ 0,516680 & 1,350497 & 0,370114 & 0,082274 \\ 0,065392 & 0,370114 & 0,574640 & 0,063240 \\ 0,014322 & 0,082274 & 0,063240 & 0,032676 \end{bmatrix}$ $\hat{\mathbf{a}} = [3,828173 \quad 8,058317 \quad 7,774063 \quad 3,713507]^T$
Stückweise interp. Regelung	$\text{nReg} = 50, f_{\Re} = 1,04^p, f_{\Im} = 1,03^p, p = 1, \dots, \text{nReg}$ $\mathbf{R}_1 = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 0,290501 & 0,650800 & 0,282757 & 0,073146 \\ 0,650800 & 1,642804 & 0,703622 & 0,188105 \\ 0,282757 & 0,703622 & 0,303440 & 0,080550 \\ 0,073146 & 0,188105 & 0,080550 & 0,021759 \end{bmatrix}$ $\mathbf{k}_1 = [3,765064 \quad 9,514331 \quad 3,734804 \quad 1,040200]^T$
Lineare Regelung	$\mathbf{k}_{\text{lin}} = [0,455860 \quad -0,418264 \quad -0,044485 \quad -0,001542]^T$

Zeitoptimale Steuerung

$$\mathbf{x}_0 = [0,261799 \quad -0,174533 \quad -0,174533 \quad -40]^T, \alpha_{\text{opt}} = -1$$

$\frac{\text{Auslenkung}}{\mathbf{x}_0} \%$	t_{opt}
100%	$t_{\text{opt}} = [1,44008 \quad 2,47577 \quad 2,91002 \quad 3,18336]$
90%	$t_{\text{opt}} = [1,33052 \quad 2,32365 \quad 2,76404 \quad 3,03305]$
80%	$t_{\text{opt}} = [1,22002 \quad 2,17033 \quad 2,61654 \quad 2,88021]$
70%	$t_{\text{opt}} = [1,10838 \quad 2,01527 \quad 2,46663 \quad 2,72376]$
60%	$t_{\text{opt}} = [0,995316 \quad 1,8576 \quad 2,3129 \quad 2,5620]$
50%	$t_{\text{opt}} = [0,880331 \quad 1,69583 \quad 2,15304 \quad 2,39243]$
40%	$t_{\text{opt}} = [0,762536 \quad 1,52734 \quad 1,9831 \quad 2,21047]$
30%	$t_{\text{opt}} = [0,640213 \quad 1,34721 \quad 1,79583 \quad 2,00808]$
20%	$t_{\text{opt}} = [0,509597 \quad 1,14481 \quad 1,57578 \quad 1,76807]$
10%	$t_{\text{opt}} = [0,359784 \quad 0,889569 \quad 1,27852 \quad 1,44094]$

Zeitoptimale Steuerung

$$\mathbf{x}_0 = [0,261799 \quad 0,174533 \quad 0,174533 \quad 40]^T, \alpha_{\text{opt}} = 1$$

$\frac{\text{Auslenkung}}{\mathbf{x}_0} \%$	t_{opt}
100%	$t_{\text{opt}} = [0,698975 \quad 1,57902 \quad 2,02881 \quad 2,27062]$
90%	$t_{\text{opt}} = [0,664096 \quad 1,51667 \quad 1,96593 \quad 2,20249]$
80%	$t_{\text{opt}} = [0,627621 \quad 1,45085 \quad 1,89873 \quad 2,12948]$
70%	$t_{\text{opt}} = [0,589236 \quad 1,38078 \quad 1,82619 \quad 2,05045]$

60%	$t_{\text{opt}} = [0,548501 \quad 1,30540 \quad 1,74687 \quad 1,96381]$
50%	$t_{\text{opt}} = [0,504781 \quad 1,22311 \quad 1,65864 \quad 1,86717]$
40%	$t_{\text{opt}} = [0,457088 \quad 1,13143 \quad 1,55808 \quad 1,75672]$
30%	$t_{\text{opt}} = [0,403728 \quad 1,02600 \quad 1,43917 \quad 1,62572]$
20%	$t_{\text{opt}} = [0,341314 \quad 0,89791 \quad 1,28934 \quad 1,46012]$
10%	$t_{\text{opt}} = [0,260681 \quad 0,72231 \quad 1,07281 \quad 1,21967]$

Literaturverzeichnis

- [1] ADAMY, J. : Implicit Lyapunov Functions and Isochrones of Linear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 50 (2005), S. 874–879
- [2] ADAMY, J. : *Nichtlineare Regelungen*. Springer Verlag, 2009
- [3] ADAMY, J. ; FLEMMING, A. : Soft variable-structure controls: a survey. In: *Automatica* 40 (2004), S. 1821–1844
- [4] ADAMY, J. : *Strukturvariable Regelungen mittels impliziter Ljapunov-Funktionen, Fortschrittsberichte VDI Reihe 8*. Bd. 271, VDI Verlag, 1991
- [5] ALAMO, T. ; CEPEDA, A. ; LIMON, D. : Improved computation of ellipsoidal invariant sets for saturated control systems. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, 2005
- [6] ALBERS, K. : *Syntheseverfahren für nichtlineare parameter- und strukturvariable Zustandsregler unter Berücksichtigung von Begrenzungen*, Universität Dortmund, Diss., 1983
- [7] ALIZADEH, F. : Interior Point Methods in Semidefinite Programming with Applications to Combinatorial Optimization. In: *SIAM Journal on Optimization* 5 (1993), S. 13–51
- [8] ASTRÖM, K. J. ; RUNDQUIST, L. : Integrator windup and how to avoid it. In: *Proceedings of the 1989 of American Control Conference*, 1989
- [9] BECKER, C. : *Synthese strukturvariabler Regelungssysteme mit Hilfe von Ljapunov-Funktionen*, Universität Karlsruhe, Diss., 1979
- [10] BERNSTEIN, D. ; MICHEL, A. : A Chronological Bibliography on Saturating Actuators. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 5 (1995), S. 375–380

- [11] BLAND, R. G. ; GOLDFARB, D. ; TODD, M. J.: The Ellipsoid Method: A Survey. In: *Operation Research* 29 (1981), S. 1039–1091
- [12] BOYD, S. ; EL GHAOU, L. ; FERON, E. ; BALAKRISHNAN, V. : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994
- [13] BOYD, S. ; VANDENBERGHE, L. : *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004
- [14] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOLA, G. ; MÜHLIG, H. : *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001
- [15] BUHL, M. ; JOOS, P. ; LOHMANN, B. : Sättigende weiche strukturvariable Regelung. In: *Automatisierungstechnik* 6 (2008), S. 316–323
- [16] CAMACHO, E. F. ; BORDONS, C. : *Model Predictive Control*. Springer, 2003
- [17] CAMPO, P. J. ; MORARI, M. : Robust Control of processes subject to saturation nonlinearities. In: *Computers and Chemical Engineering* 14 (1990), S. 343–358
- [18] DE DONA, J. A. ; GOODWIN, G. C. ; MOHEIMANI, S. O. R.: Combining switching, over-saturation and scaling to optimise control performance in the presence of model uncertainty and input saturation. In: *Automatica* 38 (2002), S. 1153–1162
- [19] DE DONA, J. A. ; MOHEIMANI, S. R. ; GOODWIN, G. C. ; FEUER, A. : Robust hybrid control incorporating over-saturation. In: *System&Control Letters* 38 (1999), S. 179–185
- [20] DIKIN, I. I.: Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. In: *Soviet Mathematics Doklady* 8 (1967), S. 674–675
- [21] EMELYANOV, S. V.: *Automatische Regelsysteme mit veränderlicher Struktur*. Oldenbourg, 1967
- [22] ENGELN-MÜLLGES, G. ; NIEDERDRENK, K. ; WODICKA, R. : *Numerik-Algorithmen*. Springer, 2005
- [23] FLÜGGE-LOTZ, I. ; TAYLOR, C. F.: Synthesis of a Nonlinear Control System. In: *IRE Transactions on Automatic Control* 1 (1956), S. 3–9

- [24] FÖLLINGER, O. ; ROPPENECKER, G. : *Optimale Regelung und Steuerung*. Oldenbourg Verlag, 1994
- [25] FRANKE, D. : Entwurf robuster Regelungssysteme mittels zustandsabhängiger Strukturänderung. In: *Regelungstechnik* 4 (1981), S. 119–125
- [26] FRANKE, D. : Ausschöpfen von Stellgrößenbeschränkungen mittels weicher strukturvariabler Regelung. In: *Regelungstechnik* 10 (1982), S. 348–355
- [27] FRANKE, D. : Strukturvariable Regelung ohne Gleitzustände. In: *Regelungstechnik* 8 (1982), S. 271–276
- [28] FRANKE, D. : Ein nichtlinearer dynamischer Regler mit adaptiven Eigenschaften. In: *Regelungstechnik* 11 (1983), S. 369–374
- [29] FREUND, R. M.: Interior Point Methods: Current status and future directions. In: *OPTIMA-Mathematical Programming Society Newsletter* 51 (1996), S. 1–28
- [30] FRIEDLAND, B. : *Advanced Control System Design*. Prentice Hall, 1996
- [31] FULLER, A. T.: In-the-large stability of relay and saturating control systems with linear controllers. In: *International Journal of Control* 10 (1969), Nr. 4, S. 457–480
- [32] GUSSNER, T. : *Weiche strukturvariable Regelung mittels impliziter Lyapunovfunktionen für Mehrgrößensysteme*, Technische Universität Darmstadt, Diplomarbeit, 2007
- [33] GUTMAN, P. ; HAGANDER, P. : A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems. In: *IEEE Transaction on Automatic Control* 30 (1985), Nr. 1, S. 22–33
- [34] HANUS, R. ; KINNAERT, M. ; HENROTTE, J. L.: Conditioning Technique, a General Anti-windup and Bumpless Transfer Method. In: *Automatica* 23 (1987), Nr. 6, S. 729–739
- [35] HELMBERG, C. : Semidefinite Programming / Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin. 1999. – Forschungsbericht

- [36] HELMBERG, C. ; RENDL, F. : A Spectral Bundle Method for Semidefinite Programming. In: *SIAM Journal on Optimization* 10 (2000), Nr. 3, S. 673–696
- [37] HELMBERG, C. ; RENDL, F. ; VANDERBEI, R. J. ; WOLKOWICZ, H. : An Interior-Point Method for Semidefinite Programming. In: *SIAM Journal on Optimization* 6 (1996), S. 342–361
- [38] HENRION, D. ; GARCIA, G. ; TARBOURIECH, S. : Piecewise-Linear Robust Control of Systems with Input Constraints. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 1998
- [39] HIPPE, P. : *Windup in Control*. Springer, 2006
- [40] HIPPE, P. : Eine systematische Vermeidung der durch Stellbegrenzungen ausgelösten Probleme. In: *Automatisierungstechnik* 8 (2007), S. 377–393
- [41] HU, T. ; LIN, Z. : On enlarging the basin of attraction for linear systems under saturated linear feedback. In: *System & Control Letters* 40 (2000), S. 59–69
- [42] HU, T. ; LIN, Z. : *Control Systems with Actuator Saturation*. Birkhäuser, 2001
- [43] HU, T. ; LIN, Z. : On Semiglobal Stabilizability of Antistable Systems by Saturated Linear Feedback. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 47 (2002), S. 1192–1198
- [44] HU, T. ; LIN, Z. ; CHEN, B. M.: An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. In: *Automatica* 38 (2002), S. 351–359
- [45] HU, T. ; LIN, Z. ; SHAMASH, Y. : On Maximizing the Convergence Rate for Linear Systems With Input Saturation. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003
- [46] HU, T. ; TEEL, A. R. ; ZACCARIAN, L. : Anti-windup for linear control systems with input saturation: Achieving regional, nonlinear performance. In: *Automatica* 44 (2008), S. 512–519
- [47] JASNIEWICZ, B. ; ADAMY, J. : Fast robust control of linear systems subject to actuator saturation. In: *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, 2008

- [48] KARMARKAR, N. : A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. In: *Combinatorica* 4 (1984), Nr. 4, S. 373–395
- [49] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002
- [50] KIENDL, H. : *Suboptimale Regler mit abschnittsweise linear Struktur*. Springer Verlag, 1972
- [51] KIENDL, H. : *Fuzzy Control methodenorientiert*. Oldenbourg Verlag, 1997
- [52] KIENDL, H. ; SCHNEIDER, G. : Synthese nichtlinearer Regler für die Regelstrecke const/s^2 aufgrund ineinandergeschachtelter abgeschlossener Gebiete beschränkter Stellgröße. In: *Regelungstechnik* 20 (1972), S. 289–296
- [53] KLERK, E. D.: *Aspects of Semidefinite Programming*. Kluwer Academic Publisher, 2002
- [54] KOTHARE, M. V. ; CAMPO, P. J. ; MORARI, M. ; NETT, C. N.: A Unified Framework for the Study of Anti-windup Designs. In: *Automatica* 30 (1994), S. 1869–1883
- [55] KROLL, A. ; ABEL, D. : Modellbasierte Prädiktive Regelung. In: *Automatisierungstechnik* 12 (2006), S. 587–589
- [56] LEDWICH, G. : Linear switching controller convergence. In: *IEEE Proceedings Control Theory and Applications* Bd. 142, 1995, S. 329–334
- [57] LENS, H. ; ADAMY, J. : Schnelle Regelung von linearen Systemen mit Stellgrößenbeschränkungen. In: *Automatisierungstechnik* 57 (2009), Februar, Nr. 2, S. 70–79
- [58] LENS, H. : *Schnelle Ausgangsrückführungen für Systeme mit Stellgrößenbeschränkungen*, TU Darmstadt, Diss., 2010
- [59] LIN, Z. ; SABERI, A. : Semi-global exponential stabilization of linear systems subject to 'input saturation' via linear feedbacks. In: *Systems & Control Letters* 21 (1993), S. 225–239
- [60] *Kapitel Stabilizing Feedback Design for Linear Systems with Rate Limited Actuators*. In: LIN, Z. ; PACHTER, M. ; YACOV SHAMASH, S. B.: *Control of Uncertain Systems with Bounded Inputs*. Springer, 1997, S. 173–186

- [61] LIN, Z. ; STROORVOGEL, A. A. ; SABERI, A. : Output Regulation for Linear Systems Subject to Input Saturation. In: *Automatica* 32 (1996), S. 29–47
- [62] LÖFBERG, J. : YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the CACSD Conference*
- [63] MACIEJOWSKI, J. M.: *Predictive Control with Constraints*. Prentice-Hall, 2002
- [64] MASON, O. ; SHORTEN, R. : The geometry of convex cones associated with the Lyapunov inequality and the common Lyapunov function problem. In: *Electronic Journal of Linear Algebra* 12 (2005), S. 42–63
- [65] MITTELMANN, H. D.: An independent benchmarking of SDP and SOCP solvers. In: *Mathematical Programming, Series B* 95 (2003), S. 407–430
- [66] NEMIROVSKI, A. : *Interior Point Polynomial Time Methods in Convex Programming*. Lecture Notes - Georgia Institute of Technology, 2004
- [67] NESTEROV, Y. ; NEMIROVSKII, A. : *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994
- [68] NIEWELS, F. : *Mehrdeutige Ljapunov-Funktionen und ihre Verwendung zum Entwurf strukturvariabler Regelungssysteme*, Universität Dortmund, Diss., 2002
- [69] NIEWELS, F. : Entwurf strukturvariabler Regelungssysteme basierend auf mehrdeutigen Ljapunov-Funktionen. In: *Automatisierungstechnik* 9 (2001), S. 415–423
- [70] OBRESCHKOFF, N. : *Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963
- [71] RAWLINGS, J. B.: Tutorial Overview of Model Predictive Control. In: *IEEE Control Systems Magazine* 20 (2000), Nr. 3, S. 38–52
- [72] RECHENBERG, I. : *Evolutionstrategie '94*. Frommann Holzboog, 1994

- [73] SABERI, A. ; LIN, Z. ; TEEL, A. R.: Control of Linear Systems with Saturating Actuators. In: *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996
- [74] SHEWCHUN, J. M. ; FERON, E. : High performance bounded control. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 1997
- [75] SHORTEN, R. ; WIRTH, F. ; MASON, O. ; WULFF, K. ; KING, C. : Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems. In: *SIAM Review* 49 (2007), S. 545–592
- [76] SONTAG, E. D. ; SUSSMANN, H. J.: Nonlinear output feedback design for linear systems with saturating controls. In: *Proceedings of the 29-th Conference on Decision and Control*, 1990
- [77] STELZNER, P. : *Spatförmige Ljapunov-Funktionen und ihre Anwendungen in der Regelungstechnik*, Universität Dortmund, Diss., 1987
- [78] SUAREZ, R. ; ALVAREZ-RAMIREZ, J. ; SOLIS-DAUN, J. : Linear Systems with bounded inputs: Global Stabilization with Eigenvalue Placement. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 7 (1997), S. 835–845
- [79] SUSSMANN, H. J. ; SONNTAG, E. D. ; YANG, Y. : A General Result on the Stabilization of Linear Systems Using Bounded Controls. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 39 (1994), S. 2411–2425
- [80] SUSSMANN, H. J. ; YANG, Y. : On the stabilizability of multiple integrators by means of bounded feedback controls. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1991
- [81] TEEL, A. R.: Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. In: *Systems & Control Letters* 18 (1991), S. 165–171
- [82] TEEL, A. R.: Semi-Global Stabilizability of Linear Null Controllable Systems with Input Nonlinearities. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 40 (1995), S. 96–100
- [83] TODD, M. : *Semidefinite Optimization*. 2001
- [84] TODD, M. J. ; YE, Y. : A Centered Projective Algorithm for Linear Programming. In: *Mathematics of Operations Research* 15 (1990), S. 508–529

- [85] TOH, K. C. ; TÜTÜNCÜ, R. H. ; TODD, M. J.: *On the implementation and usage of the SDPT3 - a Matlab software package for semidefinite-quadratic-linear programing, version 4.0.* 2006
- [86] UTKIN, V. I.: Variable Structure Systems with Sliding Modes. In: *IEEE Transaction on Automatic Control* 22 (1977), Nr. 2, S. 212–222
- [87] VANANTWERP, J. ; BRAATZ, R. : A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. In: *Journal of Process Control* 10 (2000), Nr. 4, S. 363–385
- [88] VANDENBERGHE, L. ; BOYD, S. : *Semidefinite Programming.* 1996. – To Appear in SIAM Review, March 1996
- [89] VANDENBERGHE, L. ; BOYD, S. ; WU, S.-P. : Determinant Maximization with Linear Matrix Inequality Constraints. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 19 (1996), S. 499–533
- [90] WIGNER, E. P. ; YANASE, M. M.: On the positive semidefinite nature of a certain matrix expression. In: *Canadian Journal of Mathematics* 16 (1964), Nr. 2, S. 397–406
- [91] WOLKOWICZ, H. : *Semidefinite and Cone Programming Bibliography.* Version: 2008. <http://orion.math.uwaterloo.ca/~hwolkowicz/henry/software/SDP.shtml>
- [92] WREDENHAGEN, G. F.: A new method of controller design for systems with input constraints using interpolation function. In: *Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control*, 1994
- [93] WREDENHAGEN, G. F. ; BÉLANGER, P. R.: Piecewise-linear LQ control for systems with input constraints. In: *Automatica* 30 (1994), Nr. 3, S. 403–416
- [94] YANKULOVA, D. ; ADAMY, J. : LMI-Entwurf schneller Regler mit impliziten Ljapunov-Funktionen. In: *Automatisierungstechnik* 56 (2008), Nr. 12, S. 636–643
- [95] YE, Y. ; TODD, M. J. ; MIZUNO, S. : An $O(\sqrt{n}L)$ -Iteration Homogeneous and Self-Dual Linear Programming Algorithm. In: *Mathematics of Operations Research* 19 (1994), Nr. 1, S. 53–67

- [96] YOUNG, K. D. ; UTKIN, V. I. ; ÖZGÜNER, Ü. : A Control Engineer's Guide to Sliding Mode Control. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 7 (1999), Nr. 3, S. 328–342
- [97] ZHANG, X. : *Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Stability Analysis of Linear Parameter-Dependent Dynamical Systems*, School of Aerospace Engineering Georgia Institute of Technology, Diss., 2003